Série A, N° 3.812
N° d'ordre : 4.663

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

Jacques LEVY-BRUHL

1re Thèse :

PERMUTATIONS GÉNÉRALISÉES. APPLICATIONS.

2e Thèse :

Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 26 janvier 1962 devant la Commission d'examen

M. DUBREIL — Président
M. LICHNEROWICZ, M. SAMUEL — Examinateurs

IMPRIMERIE
R. FOULON & Cie
29, Rue Deparcieux, 29
PARIS — 1961

Série A, N° 3.812
N° d'ordre : 4.663

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

Jacques LEVY-BRUHL

1re Thèse :

PERMUTATIONS GÉNÉRALISÉES. APPLICATIONS.

2e Thèse :

Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 26 janvier 1962 devant la Commission d'examen

M. DUBREIL — Président
M. LICHNEROWICZ, M. SAMUEL — Examinateurs

IMPRIMERIE
R. FOULON & Cie
29, Rue Deparcieux, 29
PARIS — 1961

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen ..... ZAMANSKY

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure
DE BROGLIE ...	T	Théories physiques
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et applications
BOURCART	T	Géographie physique et Géologie dynamique
PLANTEFOL	T	Botanique
GRASSÉ	T	Evolution des êtres organisés
PRÉVOST	T	Chimie organique
BOULIGAND	T	Analyse appliquée à la Géométrie
CHAUDRON	T	Chimie appliquée
WYART	T	Minéralogie et Cristallographie
TEISSIER	T	Zoologie
MANGENOT	T	Biologie végétale (Orsay)
P. AUGER	T	Physique quantique et Relativité
MONNIER	T	Physiologie des Fonctions
PIVETEAU	T	Paléontologie
ROCARD	T	Physique (E.N.S.)
H. CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.)
LAFFITTE	T	Chimie générale
FAVARD	T	Géométrie supérieure
COULOMB	T	Physique du Globe
Mlle COUSIN ...	T	Biologie
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale
P. DRACH	T	Zoologie
KASTLER	T	Physique (E.N.S.)
EPHRUSSI	T	Génétique
RIVIÈRE	T	Géologie (Orsay)
GAUTHERET ...	T	Biologie (P.C.B.)
R. LUCAS	T	Recherches physiques
A. THOMAS ...	T	Biologie cellulaire
ARNULF	T	Optique appliquée
M. MORAND ...	T	Physique Enseignement
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.)
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides
DANJON	T	Astronomie
PETIT	T	Biologie maritime
QUÉNEY	T	Météorologie et Dynamique atmosphérique
GALLIEN	T	Embryologie
EICHHORN	T	Biologie végétale (P.C.B.)
DE CUGNAC ...	T	Biologie végétale (S.P.C.N.)
Mlle CAUCHOIS .	T	Chimie physique
THELLIER	T	Physique du Globe
L'HÉRITIER	T	Biologie générale (Orsay)
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay)
PONCIN	T	Mécanique générale
DUBREIL	T	Arithmétique et Théorie des nombres
QUELET	T	Chimie organique
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée
CHAMPETIER ...	T	Chimie macromoléculaire
CUVILLIER	T	Micropaléontologie
JUNG	T	Pétrographie
TRILLAT	T	Microscopie et Diffraction électronique
WIEMANN	T	Chimie organique et structurale
JACQUINOT	T	Spectroscopie (Orsay)
VASSY	T	Physique de l'atmosphère
DESTOUCHES ...	T	Théories physiques
PRUVOST	T	Géologie
AMIEL	T	Chimie des Solides
HOCART	T	Minéralogie et Cristallographie
J.-P. MATHIEU .	T	Recherches physiques
COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.)
MAY	T	Zoologie (Orsay)
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie
FELDMANN	T	Biologie végétale (P.C.B.)
GUINIER	T	Physique des Solides (Orsay)
JOST	T	Physiologie comparée
FORTET	T	Calcul des Probabilités
SCHWARTZ	T	Calcul différentiel et Intégral
CHOUARD	T	Physiologie végétale
MALAVARD	T	Aviation (Technique aéronautique)
BRELOT	T	Calcul différentiel
NORMANT	T	Synthèse organique générale
BÉNARD	T	Chimie (E.N.S.C.P.)
BUVAT	T	Botanique (E.N.S.)
DUGUÉ	T	Statistiques mathématiques
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie
ULRICH	T	Physiologie végétale (E.N.S.)
MARÉCHAL	T	Optique théorique et appliquée
KIRRMANN	T	Théories chimiques
CHADEFAUD ...	T	Botanique
Mlle LE BRETON	T	Physiologie
SALEM	T	Mathématiques générales
LELONG	T	Mathématiques générales
DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie comparées
EHRESMANN ...	T	Topologie algébrique
FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.)
GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique
GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.)
PISOT	T	Calcul des Probabilités
ROCH	T	Géologie
SCHATZMAN ..	T	Astrophysique

TERMIER	T	Paléontologie stratigraphique
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales
LENNUIER	T	Physique (P.C.B.)
RIZET	T	Génétique (Orsay)
ROUTHIER	T	Géologie appliquée
Mme TONNELAT.	T	Relativité
DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.)
SOUCHAY	T	Chimie (P.C.B.)
AIGRAIN	T	Electrotechnique générale
BRUSSET		Chimie minérale
M. LÉVY	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay)
Mme CHAIX ..	T	Chimie biologique
Mme HUREL-PY.		Biologie végétale (P.C.B.)
PIAUX	T	Chimie (S.P.C.N.)
BRUN	T	Mécanique expérimentale des fluides
LEDERER	T	Chimie biologique
Mme DUBREIL .	T	Mathématiques (Agrég.)
Mme LELONG ..	T	Mathématiques (E.N.S.)
BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.)
COTTE	T	Physique (M.P.C.)
J.-E. DUBOIS ...	T	Chimie (M.P.C.)
LAMOTTE	T	Zoologie (E.N.S.)
André MICHEL .	T	Chimie minérale (Orsay)
OLMER	T	Energétique générale
ROUAULT	T	Physique
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée
BARCHEWITZ ...	T	Chimie physique
BROSSEL	T	Physique atomique
BUSER		Biologie animale (P.C.B.)
CAMUS		Biologie végétale (P.C.B.)
CASTAING	T	Physique (Orsay)
CURIEN	T	Minéralogie et Cristallographie
MOYSE	T	Physiologie végétale (Orsay)
PANNETIER	T	Chimie (Orsay)
POSSOMPES	T	Biologie animale (P.C.B.)
PULLMANN		Chimie théorique
TEILLAC		Physique nucléaire et Radioactivité
TONNELAT		Biologie physico-chimique
VILLE	T	Econométrie
WILLEMART ...		Chimie (P.C.B.)
DODÉ	T	Chimie (Orsay)
FREYMANN	T	Physique (S.P.C.N.)
GUINOCHET	T	Biologie végétale (Orsay)
ROLLET	T	Chimie (P.C.B.)
Mlle JOSIEN ...	T	Chimie (P.C.B.)
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes
ARNOULT	T	Electronique (Orsay)
CHAPELLE	T	Physique (Orsay)
DELANGE	T	Mathématiques (Orsay)
DENY	T	Mathématiques générales (Orsay)
GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides
G. LUCAS	T	Géologie
ALLARD	T	Chimie physique
BERTHELOT	T	Physique fondament. des hautes énergies (Orsay)
BRICARD	T	Météorologie
Mme ALBE-FESSARD		Psychophysiologie
FRIEDEL		Physique des Solides (Orsay)
M. JULIA		Chimie organique structurale
LENDER		Biologie animale (S.P.C.N., Orsay)
MAGAT		Physicochimie des rayonnements
Mlle QUINTIN ..	T	Electrochimie
MONOD	T	Biochimie cellulaire
BENOIT	T	Physiol. animale (Orsay)
DE POSSEL	T	Analyse numérique
CHARLOT	T	Chimie analytique
HAÏSSINSKY	T	Radiochimie
LEMÉE	T	Physiologie B.M.P.V. (Orsay)
GUÉRIN	T	Chimie (Orsay)
M. CHATELET .		Chimie (P.C.B.)
JEAN		Physique (Orsay)
MATTLER	T	Physique (Orsay)
Louis MICHEL .		Physique théor. (Orsay)
RUMPF		Chimie (P.C.B.)
BERGERARD		Biologie anim. (S.P.C.N.) (Orsay)
BERTEIN		Electronique (Orsay)
BOUISSIERES ...		Chimie des Radioéléments (Orsay)
Mme COUTURE .		Thermodynamique et Mécanique physique
ELLENBERGER ..		Géologie appliquée
FRANC		Biologie animale (P.C.B.)
SCHNELL		Botanique tropicale (Orsay)
STOLKOWSKI ...		Biologie animale (P.C.B.)
ACHER		Chimie biologique (Orsay)
BAUDOIN		Biologie
BEAUMONT		Biologie animale
BLAMONT		Géophysique Ionosphère
BOURREAU		Biologie végétale (S.P.C.N., Orsay)
D. CURIE		Physique (M.G.P.)
DURAND-DELGA .		Géologie
FREON		Chimie organique (Orsay)
HELLER		Physiologie végétale
TORTRAT		Calcul des probabilités
CAILLEUX		Géologie (S.P.C.N.)
MAGNAN	T	Physique (P.C.B.)
DAUDEL		Mécanique ondulatoire appliquée à la Chimie théorique et à la Physique nucléaire
Mlle FOURCROY		Biologie végétale (S.P.C.N.)
BARRAUD		Physiologie cellulaire
NOIROT		Evolution des êtres organisés
Mme FOURES-BRUHAT	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste
Mlle VEIL		Physiologie générale
LWOFF	T	Microbiologie
SIESTRUNCK ...	T	Mécanique physique et expérimentale
LACOMBE	T	Métallurgie (Orsay)
BROCHARD	T	Physique P.C.B. (Orsay)
CABANNES	T	Mécanique générale
LESIEUR	T	Mathématiques M.P.C. (Orsay)
MAZET	T	Mécanique générale (Orsay)

Secrétaire général ..... R. POULLAIN

INTRODUCTION

Nous avons essayé dans ce travail de dégager certaines propriétés des couples d'indices appartenant à un certain ensemble, et de n-uples de ces couples, En établissant entre ces n-uples des règles opératoires ou des relations d'équivalence, on peut arriver à traiter dans un même esprit des questions d'analyse combinatoire, de théorie des groupes finis, et d'algèbre linéaire.

Dans le premier chapitre, nous montrons comment ce genre de questions est lié à la théorie des graphes, des compositions de nombres en somme de nombres positifs ou nuls, des partitions de nombres en nombres positifs décroissants, et des tresses d'Artin. Nous introduisons pour chacune de ces questions des structures de demi groupe, de treillis, de demi groupe réticulé, ou de groupe. Cet aspect de l'analyse combinatoire ne nous semble pas avoir été très étudié jusqu'ici, celle ci s'étant cantonnée le plus souvent à des questions d'énumération.

Le chapitre II est plus spécialement consacré à l'étude de certains éléments de l'algèbre du groupe symétrique sur un anneau d'intégrité : les symétriseurs et les antisymétriseurs, et à leurs applications. L'expression sous différentes formes d'un même élément de cette algèbre permet de démontrer de nombreuses identités entre symétriseurs et antisymétriseurs, notamment celles que nous nommons formules de LAPLACE et de SCHWEIN. L'introduction de relations d'équivalence entre permutations permet de donner une signification à des permutations où certains des indices sont égaux, et par ce biais de trouver une généralisation de formules classiques de SYLVESTER, CAUCHY, JACOBI, KRONECKER relatives à des déterminants, qui prennent une signification en tant qu'expression différente d'un même élément de l'algèbre du groupe symétrique.

Toutes ces formules peuvent alors s'appliquer non seulement dans le cas de la théorie des déterminants, comme il est fait de manière classique, mais encore sur chaque ensemble homomorphe à l'algèbre du groupe symétrique.

.../...

Pour la démonstration de nombreux théorèmes, nous avons utilisé un lemme de VON NEUMANN, qui sert de fondement classique à la théorie des représentations irréductibles du groupe symétrique. Enfin une application simple de la formule de LAPLACE permet de démontrer une généralisation d'un résultat de FROBENIUS et de FONTENE ROUCHE sur les mineurs réguliers qui sert de fondement à la théorie des diviseurs élémentaires, en établissant directement les propriétés de divisibilité (sans passer par l'intermédiaire des applications linéaires). Les propriétés des pfaffiens sont une autre application de la formule de LAPLACE.

Le troisième chapitre est consacré au produit symétrisé, produit associatif défini entre n-uples d'éléments. L'étude systématique de ces n-uples ou n-mots permet dans le cas des n-mots commutatifs de construire une théorie englobant à la fois celle des fonctions symétriques d'un ou plusieurs systèmes d'indéterminées, et la théorie de l'équation caractéristique. Les formules de NEWTON, pour les fonctions symétriques, et une formule généralisant celle de CAYLEY HAMILTON, apparaissent ainsi comme des cas particuliers d'une même propriété plus générale entre n-mots. L'introduction du treillis des partitions défini au chapitre I permet de préciser la forme classique du théorème sur les fonctions symétriques d'un système d'indéterminées. On a donné aussi une interprétation des coefficients figurant dans les produits de fonctions symétriques élémentaires. La considération du produit symétrisé permet également d'introduire les fonctions de SCHUR, et les caractères du groupe symétrique. Le produit symétrisé intervient tout naturellement dans la théorie de la dérivation et de la polarisation. Le produit symétrisé de matrices, qui semble avoir été introduit par STEPHANOS permet de retrouver des invariants simultanés de plusieurs applications linéaires, ainsi que des propriétés relatives à l'équation caractéristique; on a donné, à titre d'exemple des applications au cas des matrices symétriques et symétriques gauches

D'autres relations d'équivalence entre n-uples de couples d'indices permettent d'appliquer le produit symétrisé à l'algèbre des symétriseurs et antisymétriseurs du Chapitre II, , elles peuvent permettre de donner des relations entre déterminants dont les rangées appartiennent à des matrices distinctes.

Bien des questions que nous avons seulement effleurées, peuvent sans nul doute être approfondies dans le même esprit. Pourquoi dénier aux

.../...

permutations, aux partitions, aux matrices tout intérêt "intrinsèque" en ne les présentant que comme un moyen, parfois commode et parfois vieillot, de représenter les applications bijectives d'un ensemble fini sur lui même, ou les applications linéaires d'un module dans un autre ? L'étude des endomorphismes d'un espace vectoriel ne revient pas à l'étude des matrices, mais à l'étude de l'ensemble quotient de l'ensemble des matrices par la relation d'équivalence qu'est la similitude. Une des raisons pour lesquelles on a abandonné les méthodes de GRASSMANN, SYLVESTER, CAYLEY et de nombreux mathématiciens du Siècle dernier est que certains aspects des problèmes peuvent paraître rébarbatifs, en raison des notations compliquées. Mais faut-il pour cela se résoudre à passer sous silence certaines propriétés au lieu d'essayer, dans la mesure du possible, de les systématiser ?

CHAPITRE I

n-MOTS ET PERMUTATIONS GENERALISEES.

A - GENERALITES.

I. n-mot. Soient n ensembles $E_1,\ldots, E_n$ et un ensemble F. Nous appellerons n-mot, à données dans E_i et résultat dans F, toute application de $E_1 x \ldots x E_n$ dans F. Nous désignerons le n-mot par $(a_1,\ldots,a_n)$ avec $a_i \in E_i$ et $(a_1,\ldots,a_n) \in F$. Par abus de langage, il nous arrivera d'appeler n-mot la valeur de $(a_1,\ldots,a_n)$ dans F.

Si par exemple tous les E_i et F coincident avec un ensemble E, on aura une opération n-aire dans E.

Nous nous attacherons à étudier des propriétés des n-mots indépendantes des ensembles E_i et F. Par exemple la relation entre deux n-mots de ne différer que par l'ordre des éléments a_i est évidemment une relation d'équivalence, si $E_i=E, \forall i$. Nous appellerons n-mot commutatif les classes d'équivalence et représenterons par $(a_1 o \ldots o\ a_n)$ la classe d'équivalence de $(a_1,\ldots, a_n)$. (Le n-mot commutatif peut se définir même si les ensembles E_i sont distincts, quand on peut définir n! applications de $E_{i_1} x \ldots x E_{i_n}$ dans F que nous représenterons par le même signe opératoire (,), telles que $(a_{i_1},\ldots, a_{i_n}) = (a_1,\ldots,a_n) \in F$, quelle que soit la permutation $i_1,\ldots, i_n$ des entiers $1,\ldots,n$, avec $a_{i_j} \in E_{i_j}$).

Le signe opératoire (,) sera bien entendu remplacé par d'autres signes opératoires (+ , x , $\cap$, $\cup$ etc) quand on impose aux n-mots certaines structures.

.../...

Exemple :

n-mot multilinéaire. Les $u_i \in M_i$, module sur un anneau commutatif R. Les n-mots $(u_1,\ldots,u_n)$ appartiennent à un R-module N.

Le n-mot sera dit multilinéaire si on a

$$(u_1,\ldots,u_i + v_i,\ldots,u_n) = (u_1,\ldots u_i,\ldots u_n) + (v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)$$

(Distributivité à la i ème place, $\forall$ i)

$$\text{et } (u_1,\ldots,au_i,\ldots,u_n) = a\,(u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_n) \qquad a \in R$$

Ces deux relations définissent un n-mot n-linéaire sur R. Si on impose aux n-mots d'être commutatifs, on obtient les polynomes homogènes de degré n sur R, aux n-mots d'être alternés les formes extérieures de degré n sur R, si tous les $M_i = M$. Un élément du produit tensoriel $M_1 \otimes \ldots \otimes M_n$ est un n-mot multilinéaire.

Le "produit vectoriel " dans R^3 par exemple est un exemple de deux mots multilinéaires dont la valeur est un 1-mot, les formes multilinéaires sont des n-mots à valeur dans R.

Le Chapitre III "Produit symétrisé" ci-dessous est relatif à l'étude d'une loi de composition particulière entre n-mots.

2. Permutations généralisées.

Définition.

Nous appellerons "permutation généralisée" un n-mot dont les éléments sont des deux - mots.

Une permutation généralisée s'écrira sous la forme

$$\left(\begin{matrix} p_1 \\ q_1 \end{matrix},\ldots,\begin{matrix} p_i \\ \sigma_i \end{matrix},\ldots,\begin{matrix} p_n \\ q_n \end{matrix}\right) = s$$

.../...

où $p_i \in E_i$, $q_i \in F_i$ $\binom{p_i}{q_i} \in G_i$, les E_i, F_i, G_i étant des ensembles donnés et où $s \in H$. La permutation généralisée s peut donc être interprétée comme une application de $G_1 x \ldots x G_n$ dans H (peut être non partout définie).

Nous nous attacherons spécialement aux propriétés des permutations généralisées qui ne dépendent pas des ensembles E_i, F_i, G_i.

La donnée de relations d'équivalence entre permutations généralisées et de lois de compositions permet de définir des structures dont nous verrons quelques exemples (Antisymétriseurs Chapitre II, Produit symétrisé de matrices, Chapitre III E).

La classe d'équivalence de s dans la relation d'équivalence entre permutations généralisées, obtenue par une permutation quelconque des couples est une permutation généralisée commutative notée

$$\left(\begin{matrix} p_1 \\ q_1 \end{matrix} o \ldots o \begin{matrix} p_n \\ q_n \end{matrix}\right) .$$

3. Produit de couples.

Soit un système de symboles S que nous représenterons soit par des lettres p,q,r, soit par des indices. Nous désignerons par $\binom{p}{q}$ un élément de SxS, et dans tout ce chapitre il sera essentiellement question de ces couples. On définit le produit formel de deux couples par leur juxtaposition $\binom{p}{q}\binom{p'}{q'}$. Le produit formel de produit formel de couples défini par la juxtaposition

$$\left[\binom{p_1}{q_1}\binom{p_2}{q_2}\right]\left[\binom{p'_1}{q'_1}\binom{p'_2}{q'_2}\binom{p'_3}{q'_3}\right] = \binom{p_1}{q_1}\binom{p_2}{q_2}\binom{p'_1}{q'_1}\binom{p'_2}{q'_2}\binom{p'_3}{q'_3}$$

n'est autre qu'un produit de mots libre dont les éléments sont les couples. Il est donc associatif.

.../...

Décomposition en produit de chaînes. Une chaîne est un produit formel de couples $\binom{p_1}{q_1}\ldots\binom{p_k}{q_k} = C$, où $p_i = q_{i+1}$, pour $1 \leqslant i \leqslant k$. Une chaîne est un cycle si $p_1 = q_k$.

La chaîne $C' = \binom{p'_1}{q'_1}\ldots\binom{p'_{k'}}{q'_{k'}}$ sera dite disjointe de C , si $q'_1 \neq p_k$.

Tout produit formel de couples peut alors se mettre d'une manière unique sous la forme $P = C_1 \ldots C_h$, où la chaîne C_{i+1} est disjointe de C_i , $\forall$ i .

La relation entre chaînes $(C,C') \in R$, si et seulement si $p_1 = p'_1$; $q_k = q'_k$, est une relation d'équivalence notée $C \equiv C' \equiv \binom{p_1}{q_k}$. Si C" est disjointe de C, elle est aussi disjointe de C'.

Dans ces conditions, nous dirons que $P \equiv P' = C'_1 \ldots C'_h$, si et seulement si $C'_i \equiv C_i$, $\forall$ i . La relation $\equiv$ est alors une relation d'équivalence compatible avec le produit formel des couples. Alors $P \equiv \binom{p''_1}{q''_1}\ldots\binom{p''_h}{q''_h}$, où $p''_i \neq q''_{i+1}$.

Remarques Dans certaines questions, on considère la relation R' définie par $(P,P') \in R'$, si et seulement si $P_1 \equiv P'_1$, où P_1 et P'_1 se déduisent de P et P' par suppression de tous leurs cycles. R' est encore une relation d'équivalence(homologie) compatible avec le produit formel et contenant R.

Exemple. Si S est une catégorie ,les couples sont les morphismes ,et les cycles les éléments neutres.

Produit lexicographique d'un m-mot par un n-mot. Soit un m-mot $(a_1,\ldots,a_m)$ et un n-mot $(b_1,\ldots,b_n)$. Nous supposons défini le produit associatif des mots par juxtaposition. Dans ces conditions , posons $(a_1,\ldots,a_m)(b_1,\ldots,b_n) = (a_1b_1,\ldots,a_ib_j,\ldots,a_mb_n)$ les a_ib_j étant rangés dans l'ordre lexicographique, c'est à dire

que, dans une base de numération suffisamment grande, les nombres ij sont croissants. Le produit est un mn-mot. Il est associatif (à $a_i b_j c_k$ on associe le nombre ijk, etc).
La relation entre deux m-mots de ne différer que par l'ordre des mots est une relation d'équivalence compatible avec ce produit lexicographique.

4. Produit lexicographique des permutations généralisées commutatives.

On appellera permutation généralisée un m-mot commutatif (No 3), tels que les éléments de S' soient les couples de S munis de l'opération associative définie au No 2. Les permutations généralisées commutatives munies du produit lexicographique forment un demi groupe.

Exemple si $P = \binom{1}{2}\binom{2}{3} \circ \binom{1}{4}$, $Q = \binom{5}{3}\binom{4}{2} \circ \binom{4}{1} \circ \binom{3}{2}$

$$PQ = \binom{1}{2}\binom{2}{3}\binom{5}{3}\binom{4}{2} \circ \binom{1}{2}\binom{2}{3}\binom{4}{1} \circ \binom{1}{2}\binom{3}{3} \circ \binom{1}{4}\binom{5}{3}\binom{4}{2} \circ \binom{4}{4} \circ \binom{1}{4}\binom{3}{2}$$

Remarquons que le produit des permutations généralisées commutatives est distributif par rapport à l'opération o, qui est commutative et associative. (Le produit des n-mots du No 3 était distributif à gauche par rapport au signe (,) qui était associatif, mais non commutatif).

5. Matrices trouées.

On convient d'adjoindre aux couples $\binom{p}{q}$ un élément $\underline{0}$ neutre pour l'opération o. Si on définit $\binom{p}{q}\binom{r}{s} = \underline{0}$ si $p \neq s$, et comme au No 3, $\binom{p}{q}\binom{r}{p} = \binom{r}{q}$, toutes les permutations généralisées sont des m-mots commutatifs, chaque mot étant formé d'un seul couple, ou d'un élément $\underline{0}$ qu'on peut supprimer. On vérifie immédiatement qu'on a encore défini par la relation $\binom{p}{q}\binom{r}{s} = \underline{0}$ une relation d'équivalence entre permutations généralisées compatible avec la multiplication. Une classe d'équivalence s'appelle une matrice trouée.

.../...

Exemple de produit de matrices trouées.

$$P = \binom{1}{2} \circ \binom{3}{1}, \quad Q = \binom{4}{1} \circ \binom{5}{3}$$

$$PQ = \binom{4}{2} \circ \underline{0} \circ \underline{0} \circ \binom{5}{1} = \binom{4}{2} \circ \binom{5}{1}.$$

Le plus souvent, nous considérerons des <u>matrices trouées idempotentes</u> c'est à dire idempotentes pour l'opération $\circ$: $\binom{p}{q} \circ \binom{p}{q} = \binom{p}{q}$

Une matrice trouée idempotente est un ensemble fini de couples $\binom{p}{q}$

En remplaçant le signe $\circ$ par le signe +, on retrouve exactement les règles de calcul pour les matrices de base e^q_p formées partout d'un 0, sauf d'un 1, à l'intersection de la p ième ligne et de la q ième colonne. A toute matrice trouée, on pourra faire correspondre un tableau rectangulaire, où l'élément e^q_p sera remplacé par un 1, à l'intersection de la p-ième ligne et de la q ième colonne. Les matrices trouées idempotentes se calculeront comme des matrices ordinaires avec les règles de calcul du treillis de BOOLE

$$\begin{array}{cccc} & & 0\ 1 & \qquad & 0\ 1 \\ & & 0\ 0\ 1 & \times & 0\ 0\ 0 \\ (\overset{+}{\circ}) & & 1\ 1\ 1 & & 1\ 0\ 1 \end{array}$$

C'est ainsi que dans l'exemple qui précède $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Une <u>permutation de n-indices</u> sera en particulier une matrice trouée idempotente, dans laquelle tout indice supérieur et tout indice inférieur figurera une seule fois, les indices supérieurs étant globalement les mêmes que les indices inférieurs. Le tableau qui la représente est une matrice classique de permutation.

Ex $\binom{1}{2} \circ \binom{2}{3} \circ \binom{3}{1}$.

Pour les permutations ordinaires, les éléments de la forme $\binom{p}{p}$ ou cycles d'ordre 1, jouent le rôle d'éléments neutres pour l'opération $\circ$.

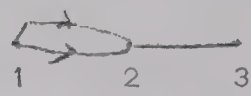
.../...

6. Liaison avec la théorie des graphes.

On peut représenter par des points les éléments p du système de symboles S. Dans ces conditions, on représentera par $\binom{p}{q}$ une courbe partant de p et aboutissant à q.

1) Dans la théorie des permutations généralisées, tous les couples $\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}$ doivent être considérés comme équivalents. A une matrice trouée correspond un "multigraphe", c'est à dire un ensemble de points susceptibles d'être joints par plusieurs arcs orientés de p vers q (Cf BERGE, p. 27). Le tableau rectangulaire correspondant à la matrice trouée est alors à coefficients entiers positifs ou nuls.

A une matrice trouée idempotente, correspond un graphe (au sens de BERGE). Le tableau rectangulaire ou matrice associée au graphe est alors formé d'éléments tous égaux à 0 ou 1.

C'est ainsi qu'au multigraphe 

correspond la matrice trouée $\binom{1}{2} \circ \binom{1}{2} \circ \binom{2}{3} = 2\binom{1}{2} \circ \binom{2}{3}$ ou le tableau $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Une telle représentation graphique met immédiatement en évidence la décomposition en cycles pour une permutation ordinaire.

Exemple : $\binom{1}{3} \circ \binom{2}{5} \circ \binom{3}{1} \circ \binom{4}{2} \circ \binom{5}{4}$

2) Dans d'autres théories que celles des permutations généralisées, on pourra par l'adjonction de nouveaux symboles distinguer les différents morphismes $\binom{p}{q}$. Par exemple, dans le plan distinguer par un signe + ou un signe - les parcours effectués dans le sens trigonométrique ou dans le sens contraire. (voir, par exemple, E ci-dessous).

.../...

B. COMPOSITIONS.

1. Définition.

Soit une matrice trouée idempotente $\binom{p_1}{q_1} \circ \ldots \circ \binom{p_n}{q_n}$ (possédant un 1 à l'intersection de la q_j ième ligne et de la p_j ième colonne et des zéros partout ailleurs), telle qu'on ait la condition

$$(C) \qquad q_j > q_i \longrightarrow p_j > p_i$$

Par exemple, la matrice $\binom{1}{1} \circ \binom{2}{1} \circ \binom{3}{2} \circ \binom{4}{2} \circ \binom{5}{2} \circ \binom{6}{3}$ ou

$$\begin{matrix} 1\,1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,1 \end{matrix}$$ satisfait à la condition (C).

Soit une suite d'objets a_1 , a_n . A toute application de la suite a_i dans l'ensemble des nombres entiers positifs $a_i \longrightarrow f(a_i) \in N$, telle que $j > i$ entraîne $f(a_j) > f(a_i)$ correspond une matrice (C) de façon bijective à savoir la matrice $\binom{f(a_1)}{1} \circ \ldots \circ \binom{f(a_n)}{n}$.

Définition d'une composition.

On appelle composition une matrice trouée idempotente satisfaisant à la condition (C), et telle que les suites des p_1, p_n et q_1, q_n rangés dans l'ordre non décroissant soient formées de la suite (avec répétition) des k premiers entiers naturels, sans omission.

Ainsi la matrice donnée dans l'exemple est une composition. Le tableau figuratif d'une composition se présente comme un "escalier" commençant à la place $\binom{1}{1}$ dont les marches sont parallèles à la diagonale principale, et dont les paliers sont des lignes horizontales.

.../...

Exemple I.

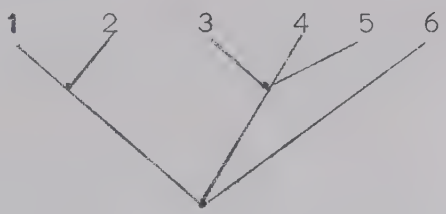
Soit une suite ordonnée d'éléments d'un ensemble $a_1, \ldots, a_n$ séparés en groupements consécutifs par des parenthèses ouvrantes et fermantes. L'application qui à l'objet a_i fait correspondre le numéro du groupement qui contient a_i est en correspondance bijective avec une composition. C'est ainsi que $(a_1 a_2)(a_3 a_4 a_5)(a_6)$ correspond à la composition de l'exemple précédent.

Exemple II.

A toute suite d'entiers positifs $(k_1, k_2, \ldots k_h)$, on peut associer bijectivement une composition, à savoir celle qui a k_1 éléments égaux à 1 dans la première ligne,..., k_p dans la p-ième ligne. C'est en raison de cette représentation que nous avons choisi d'après Mac Mahon, le terme de composition (RIORDAN, p. 107).

Représentation graphique.

On peut représenter une composition par une "arborescence" (cf BERGE, p. 157). C'est ainsi que dans l'exemple donné on a la représentation graphique évidente



Exemple III.

On peut réaliser une application bijective des compositions sur les nombres entiers écrits en numération binaire.

Soit la composition $(k_1, \ldots, k_i, \ldots, k_p) = K$ ayant k_i chiffres 1 dans la ième ligne. On considère le nombre de $\sum k_i - 1$ chiffres en numération binaire écrit de la manière suivante : on remplacera chaque k_i par k_{i-1} chiffres 1 suivis d'un 0, dont le rôle est alors de séparer deux tranches

.../...

de chiffres 1 consécutives, ou de représenter un $k_i = 1$.

Exemple :

La composition K = (2,2,1,1,1) sera représentée par le nombre binaire IOIOOO. La lecture en sens inverse est immédiate si on remarque que des zéros consécutifs séparent deux tranches comprenant zéro chiffre 1. C'est ainsi par exemple que 001100011100 représente la composition (1,1,3,1,1,4,1,1).

Conséquence I.

On peut faire correspondre à toute composition (écrite sous forme matricielle) dont la somme des éléments est égale à n, un sommet d'un hypercube à n-1 dimensions, le ième chiffre 0 ou 1 étant la ième coordonnée du sommet considéré.

Le nombre des compositions dont la somme des éléments est égale à n est donc 2^{n-1}. (voir autre démonstration RIORDAN, p. I24).

Conséquence II.

L'ensemble des compositions dont la somme des éléments est égale à n est munie d'une structure de treillis de BOOLE.

a) Le sommet B de l'hypercube couvrira le sommet A dans le treillis si toutes ses coordonnées sont égales à celles de A, sauf une d'entre elles : une coordonnée nulle dans A est remplacée dans B par un 1.

b) La longueur d'une chaîne séparant le sommet 0 (dont toutes les coordonnées sont nulles) de A est égale au nombre de 1 figurant parmi les coordonnées de A.

c) Il y a (n-1)! chaînes séparant l'élément nul de l'élément universel, car chaque sommet écrit avec p coordonnées nulles a exactement p sommets qui le couvrent.

2. Treillis multiplicatif des t_i.

Revenons à la définition matricielle des compositions donnée au début du No 1. On voit immédiatement l'interprétation matricielle du treillis figurée dans la Conséquence II précédente : A partir d'une matrice de composition A, on obtient une matrice de composition B qui la couvre, en ajoutant aux éléments de la ième ligne de A ceux de la i+1ème ligne,

.../...

et en diminuant d'une unité les indices des lignes suivantes (la i + 1ème ligne devenant alors uniquement formée de zéros. Nous désignerons par t_i l'opérateur tel que $t_i A = B$. Ainsi dans l'exemple donné au début du No 1

$$t_1 A = \begin{pmatrix} 11\ 111\ 0 \\ 00\ 000\ 1 \end{pmatrix} \qquad t_2 A = \begin{pmatrix} 11\ 0000 \\ 00\ 1111 \end{pmatrix}$$

Expression matricielle de t_i.

On voit immédiatement, la prémultiplication d'une matrice A par $\binom{p}{q}$ donnant une matrice nulle partout sauf à la q-ième ligne formée des éléments de la p-ième ligne de A,

$$t_i = \binom{1}{1} \circ \ldots \circ \binom{i}{i} \circ \binom{i+1}{i} \circ \binom{i+2}{i+1} \circ \ldots \circ \binom{i+h+1}{i+h} \circ \ldots$$

En convenant de considérer une composition comme une matrice à un nombre infini de lignes, dont un nombre fini (les premières) sont seules à ne pas être identiquement nulles, on voit immédiatement que t_i A = B où A et B sont des compositions.

La matrice t_i est elle même une composition, ou chaque ligne sauf la ligne ième qui contient deux éléments 1, ne contient qu'un seul élément 1, sur la diagonale principale sur une ligne d'indice inférieur à i, et sur la parallèle voisine sur une ligne d'indice supérieur à i. Le produit de t_i, évidemment associatif donnera d'après ce qui précède une composition. On a de plus la formule

(1) $\quad t_j\, t_i = t_i\, t_{j+1} \qquad$ si $j \geq i$. (cf Eilenberg Mac Lane p.57)

qui se démontre aisément, soit par un calcul direct, soit en remarquant qu'après l'opération t_i, la j+1 ème ligne de la matrice est devenue la j ème.

Exemple : $t_3 t_2 = t_2 t_4 =$

$$\left(\binom{1}{1} \circ \binom{2}{2} \circ \binom{3}{3} \circ \binom{4}{3} \circ \binom{5}{4}\right)\left(\binom{1}{1} \circ \binom{2}{2} \circ \binom{3}{2} \circ \binom{4}{3} \circ \binom{6}{5}\right)$$

$$= \binom{1}{1} \circ \binom{2}{2} \circ \binom{3}{2} \circ \binom{4}{3} \circ \binom{5}{3} \circ \binom{6}{4} .$$

.../...

Le demi groupe engendré par les t_i possède un élément neutre si on admet d'y adjoindre $t_o = \binom{1}{1} o \ldots o \binom{n}{n} \ldots$, matrice unité.

Première forme canonique d'un produit de t_i .

L'égalité (1) permet de démontrer par récurrence la

PROPOSITION I. Tout produit de t_i peut s'écrire de manière unique de façon que les indices lus de gauche à droite soient strictement croissants.

On peut procéder comme suit : parmi les t qui ont l'indice minimum, on choisit celui qui est situé le plus à droite, et on l'amène à la première place par des échanges de facteurs consécutifs, en majorant d'une unité tous ceux qui étaient écrits immédiatement à sa gauche.

Ayant placé le plus à gauche le facteur t_i d'indice minimum, on recommencera l'opération sur les facteurs restants, et ainsi de suite. L'unicité d'une telle forme sera démontrée à l'aide de la proposition II.
Exemple :

$$t_6 t_8 t_2 t_5 t_4 = t_2 t_7 t_9 t_5 t_4 = t_2 t_4 t_8 t_{10} t_5 = t_2 t_4 t_5 t_9 t_{11}.$$

PROPOSITION II. Toute composition peut se mettre sous la forme d'un produit de t_i, et ceci d'une manière unique si les indices i sont strictement croissants.

a) $t_i A$ étant une composition, si A est une composition, il en résulte que PI = P est une composition si P est un produit de t_i , et $I = t_o$ la matrice unité.

b) Donnons une règle pratique pour la former si P est écrit avec des indices strictement croissants. On sépare le produit P en tranches d'indices consécutifs: celle commençant t_j , contenant k_j facteurs. On écrit la suite d'entiers suivants : Si i est l'indice minimum figurant dans P, on écrit (i-1), nombres 1; puis à la tranche commençant par t_j on fait correspondre le nombre k_j+1; à un intervalle entre deux tranches on fait correspondre autant de 1 qu'il y a d'indices manquants moins un. On voit que cette suite est la composition correspondant au produit P, au sens du No 1 (Exemple II).

.../...

Exemple :

Au produit $t_3t_4t_5t_7t_8t_9t_{12}t_{13}t_{14}t_{15}$ correspond la composition (1,1, 4,4,1,5) c'est à dire la matrice ayant un élément 1 dans la première et deuxième ligne, 4 éléments 1 dans la 3e et 4e ligne, un dans la 5e et 5 dans la 6ème.

c) Le passage inverse d'une composition quelconque à un produit de t_i à indices croissants est évidemment possible d'une manière unique d'après le (b). Il en résulte notamment l'unicité d'un produit de t_i à indices strictement croissants.

Remarque.

Sous cette forme on voit aisément qu'une composition en couvrant une autre (au sens du treillis de BOOLE) s'obtient en ajoutant à sa place un facteur t_i dont l'indice manque.

Deuxième forme canonique.

On peut aussi ranger les facteurs t_i de manière que les indices forment une suite non croissante. Au monôme $t_n^{p_n} \dots t_2^{p_2} t_1^{p_1}$, où les exposants p_i peuvent être éventuellement nuls correspondra la composition $(p_1+1, \dots, p_n+1)$.

On peut passer de la deuxième forme à la première où les indices sont strictement croissants par le procédé suivant :

a) On remplace le premier monôme à droite $t_i^{p_i}$ par un produit de p_i facteurs t_j dont les indices sont croissants et consécutifs à partir de i.

b) Si le facteur $t_j^{p_j}$ immédiatement à droite de $t_i^{p_i}$ est tel que $j - i = d$, on laisse d indices non écrits, et on écrit p_j facteurs t_k consécutifs à partir de t_{j+p_i}.

Exemple : $t_5^4 t_3^3 t_2^3 t_1 = t_1 t_3 t_4 t_5 t_7 t_8 t_9 t_{12} t_{13} t_{14} t_{15}$

.../...

PGCD et PPCM de produits de t_i Sous la forme où les indices sont strictement croissants, on peut définir aisément le PGCD et le PPCM de deux monômes en t_i, qui permettent de retrouver la structure de treillis de BOOLE des compositions (1, Conséquence II).

Le PGCD sera le produit des t_i figurant dans les deux monômes; le PPCM, le produit des t_i figurant dans l'un au moins des deux monômes tous les monômes étant écrits dans l'ordre des indices strictement croissants. Ces opérations étant des réunions et intersections d'ensembles donneront bien une structure de treillis distributif.

Exemple.

Si $a = t_1 t_4 t_5 t_7 t_{12}$ $\qquad b = t_4 t_5 t_7 t_8$

$a \cap b = t_4 t_5 t_7$ (PGCD); $\qquad a \cup b = t_1 t_4 t_5 t_7 t_8 t_{12}$ (PPCM).

PROPOSITION III.

Le treillis de BOOLE des t_i est multiplicatif à droite.

Autrement dit, A,B,C désignant des compositions (produits de t_i) on a les relations

$$(A \cap B)\ C = (AC \cap BC) \quad (1)$$
$$(A \cup B)\ C = (AC \cup BC) \quad (2)$$

Il suffit évidemment de démontrer la proposition si C est formé d'un seul facteur t_j. Remarquons que si A, B sont rangés avec des indices des t_i strictement croissants At_j s'obtient en mettant t_j à sa place naturelle, et en remplaçant le facteur t_i de A par t_{i+1} si $i \geq j$.

Il est clair alors que les facteurs communs à A et B deviendront les facteurs communs et les seuls de At_j et Bt_j, ce qui prouve (1), et que la réunion des facteurs (au sens théorie des ensembles) de At_j et Bt_j proviendra des facteurs $(A \cup B)\ t_j$.

Exemple. Si $c = t_3$, a et b ayant les valeurs données précédemment dans l'exemple $ac = t_1 t_3 t_5 t_6 t_8 t_{13}$ $\qquad bc = t_3 t_5 t_6 t_7 t_8 t_9$

.../...

$ac \cap bc = t_3 t_5 t_6 t_8$; $ac \cup bc = t_1 t_3 t_5 t_6 t_7 t_8 t_9 t_{13}$

$(a \cap b)\, c = t_4 t_5 t_7 t_3 = t_3 t_5 t_6 t_8$;

$(a \cup b)\, c = t_1 t_4 t_5 t_8 t_{12} t_3 = t_1 t_3 t_5 t_6 t_9 t_{13}$.

Remarque.

Le treillis des compositions n'est pas multiplicatif à gauche comme on le verrait sur ce même exemple.

3. Degré d'une composition finie.

Le degré d'une composition représentée par une matrice finie est le nombre de 1 qui figure dans la matrice, ou dans la représentation $(k_1, \ldots, k_n)$ la somme $\Sigma k_i = n$. Sous la 2e forme canonique, les t_i rangés avec des indices non croissants, on a :

$(k_1, \ldots k_h) = t_1^{k_h - 1} \ldots t_p^{k_p - 1}\, t_1^{k_1 - 1}\, I_n$ (2e forme canonique, I_n étant la matrice unité d'ordre n. D'après ce qui précède (1 Conséquence II), les compositions de degré n forment un treillis de BOOLE à 2^{n-1} éléments.

.../...

C. COMPOSITIONS GENERALISEES.

1. Parmi les matrices satisfaisant à la condition (C) du No B, 1°, certaines ont des applications. Nous envisagerons les matrices trouées idempotentes $\binom{p_1}{q_1}$ o,...,o $\binom{p_n}{q_n}$ où les entiers $p_1,\ldots,p_n$ forment une suite non décroissante des premiers consécutifs, et où les q_i forment une suite croissante telle que $q_i > q_j$ entraîne $p_i > p_j$. Ces matrices sont des matrices de composition dans lesquelles, on a introduit des lignes formées uniquement de 0. Nous les appelerons des matrices C'.

Sous forme de tableau les matrices C' se présentent sous forme d'un escalier dont les différents étages se seraient affaissés verticalement. On peut adapter les divers exemples donnés en (B) au cas des matrices C'. Une composition généralisée est donnée par une suite finie de nombres positifs ou nuls.

2. Représentation par une suite de points et de 1.

On peut représenter bijectivement une matrice C' par une suite de points et de 1, de la manière suivante : une ligne sera représentée par autant de 1 qu'elle en contient, et deux lignes consécutives seront séparées par un point. Deux points consécutifs (sans 1 entre les deux) sépareront une ligne nulle. Une matrice de h lignes contiendra donc h-1 points. Exemple : la matrice C' ayant la première, la troisième et la cinquième ligne nulle, la deuxième formée de trois 1, la quatrième d'un 1 se représente par .111..1.

3. Demi groupe abélien réticulé des monômes en u_i.

Les compositions généralisées C' sont en correspondance bijective avec les suites d'entiers (k_1, k_h) $(k_i \geq 0,)$ Nous n'imposons plus aux k_i d'être strictement positifs comme dans le cas des compositions . A la suite des k_i on fera correspondre la matrice C' ayant k_i éléments égaux à 1 (peut-être zéro) dans la ième ligne.

.../...

Considérons une suite infinie d'indéterminées $u_1,\ldots,u_n$ et associons à la composition généralisée C', le monôme :

$$M(C') = u_1^{p_1} \; u_2^{p_2} \ldots u_h^{p_h}$$

avec $p_1 = k_1 + k_2 + \ldots + k_h$; $p_i = k_i + k_{i+1} + \ldots + k_h$

Il est clair que les compositions généralisées $C' = (k_1,\ldots,k_h)$ correspondront de façon bijective aux monômes $M(C')$ dont les degrés p_i forment une suite non croissante.

PROPOSITION. Les monômes $M(C')$ et par suite les compositions généralisées ont une structure de demi groupe réticulé abélien avec pour opérations le produit, le PGCD et le PPCM usuel des monômes, le treillis étant un treillis distributif.

Soient deux monômes $u_1^{p_1},\ldots,u_n^{p_n}$ $\qquad p_i \geq p_{i+1} \geq 0$

et $u_1^{q_1},\ldots,u_n^{q_n}$ $\qquad q_i \geq q_{i+1} \geq 0$

Pour démontrer la proposition il suffit de démontrer que le produit, le PGCD et le PPCM de ces monômes ont encore leurs degrés non croissants. Pour le produit, on a évidemment $p_i + q_i \geq p_{i+1} + q_{i+1}$.

$$\text{Sup.}\,(p_i\,,\,q_i) \;\geq\; \text{Sup.}\,(p_{i+1}\,,\,q_{i+1})$$
$$\text{Inf.}\,(p_i\,,\,q_i) \;\geq\; \text{Inf.}\,(p_{i+1}\,,\,q_{i+1})$$

On voit immédiatement que ce treillis donne des lois de composition différentes de celles de monômes en t_i quand les deux opérations sont simultanément définies (cas des compositions en nombres strictement positifs).

.../...

Interprétation géométrique des u_i.

Si on suppose une composition généralisée finie de degré n, c'est à dire $k_1 + \ldots + k_h = n$, u_1^n signifiera la composition généralisée ayant n éléments 1 dans la première ligne, et l'opération u_i consistera à faire passer le dernier 1 de la i ème ligne dans la i + 1 ème. On obtiendra ainsi toutes les compositions généralisées de degré n. Les compositions généralisées de degré n forment ainsi un treillis distributif correspondant aux monômes M (C') de la forme $u_1^n \ldots u_n^{k_n}$.

En représentant les matrices C' de cette espèce par des suites de points et de 1 (cf No 2), on aura exactement n chiffres 1 séparés par n-1 points. Le nombre des éléments du treillis est donc C_{2n-1}^n

Remarque.

Ce nombre est aussi le nombre de nombres de n chiffres dans la numération de base n+1 dont la somme des chiffres vaut n.

4. Sous treillis des monômes M (C')

En tant que treillis distributif, l'ensemble des monômes M (C') présente des sous treillis dont nous allons étudier quelques exemples.

PROPOSITION I.

Les monômes $u_1^{p_1} \ldots u_n^{p_n}$ (avec $p_i \geq p_{i+1}$) où les p_i sont liés à l'indice i, par une relation quelconque constituent un sous treillis des monômes M (C').

Car le PGCD et le PPCM de deux tels monômes $u_1^{p_1} \ldots u_n^{p_n}$ et $u_1^{q_1} \ldots u_{n'}^{q_{n'}}$ est un monôme M (C') de la forme $u_1^{r_1} \ldots u_i^{r_i} \ldots$ où r_i vaut soit p_i, soit q_i. Donc r_i est lié à i par la même relation que p_i et q_i.

.../...

Remarque.

On peut prendre pour relation R par exemple une relation de la forme $p_i = f(i)$, ou une relation de la forme $p_i < f(i)$ etc.

PROPOSITION II.

Les compositions généralisées $(k_1, \ldots, k_h)$ où $k_i \geq 0$ telles que $k_i \leq f(i)$ constituent un sous treillis du treillis M (C') ($f(i)$ fonction positive ou nulle et $k_i = p_i - p_{i+1}$)

Soient deux monômes $u_1^{p_1} \ldots u_n^{p_n}$ et $u_1^{p_1} \ldots u_n^{q_n}$ avec $0 \leq p_i - p_{i+1} \leq f(i)$, $0 \leq q_i - q_{i+1} \leq f(i)$. Supposons $p_i \leq q_i$ et distinguons 4 cas pour la formation du PGCD et du PPCM.

CAS	PPCM	PGCD
a) $p_{i-1} \leq q_{i-1}$ $p_{i+1} \leq q_{i+1}$	$q_{i-1}\ q_i q_{i+1}$	$p_{i-1}\ p_i\ p_{i+1}$
b) $p_{i-1} \leq q_{i-1}$ $p_{i+1} \geq q_{i+1}$	$q_{i-1}\ q_i\ p_{i+1}$ $(q_i - p_{i+1} \leq q_i - q_{i+1})$	$p_{i-1}\ p_i\ q_{i+1}$ $(p_i - q_{i+1} \leq q_i - q_{i+1})$
c) $p_{i-1} \geq q_{i-1}$ $p_{i+1} \leq q_{i+1}$	$p_{i-1}\ q_i\ q_{i+1}$ $(p_{i-1} - q_i \leq p_{i-1} - p_i)$	$q_{i-1}\ p_i\ p_{i+1}$ $(q_{i-1} - p_i \leq p_{i-1} - p_i)$
d) $p_{i-1} \geq q_{i-1}$ $p_{i+1} \geq q_{i+1}$	$p_{i-1}\ q_i\ p_{i+1}$ $(p_{i-1} - q_i \leq p_{i-1} - p_i)$ $q_i - p_{i+1} \leq q_i - q_{i+1}$	$q_{i-1}\ p_i\ q_{i+1}$ $(q_{i-1} - p_i \leq p_{i-1} - p_i)$ $p_i - q_{i+1} \leq q_i - q_{i+1}$

.../...

5. Arborescences bifurcantes (cf BERGE p. I57, LUKACIEWICZ.)

On appelle "arborescence bifurcante" une composition C' représentée par un monôme en $u_1, \ldots, u_n$

$$u_1^{p_1} \ldots u_n^{p_n} \quad \text{avec } p_1 = n \quad p_i \geq p_{i+1} \text{ et } p_i \leq n+1-i.$$

D'après ce qui précède (4 Proposition 1) les arborescences bifurcantes de degré n (c'est à dire telles que $p_1 = n$) forment un treillis distributif avec comme opérations le PPCM et le PGCD des monômes en u.

Leur nombre est égal au nombre de nombres de n chiffres (en numération de base n+1) dont le premier chiffre est n, et dont le ième à partir de la gauche ne dépasse pas n+1-i. On peut prouver que ce nombre est

$$\frac{1}{2n+1} C_{2n+1}^{n} .$$

Par la représentation avec des points et des 1, on voit qu'une arborescence bifurcante de degré n comprend n+1 chiffres 1 et n points, disposés de telle sorte qu'avant le k-ième chiffre 1 à partir de la gauche, il y ait sur sa gauche au moins k points (cela revient à dire que le nombre de points sur sa droite est au plus $n + 1 - k$).

Application aux ensembles munis d'une opération interne binaire.

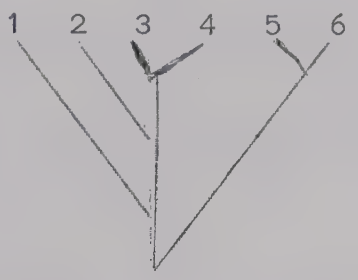
Soit un ensemble E muni d'une opération interne binaire et n+1 éléments a_1 , a_{n+1} de cet ensemble. Si on compose successivement un quelconque des éléments a_i avec le suivant, c'est à dire qu'on ouvre une parenthèse devant a_i , le nombre d'éléments à composer diminuera chaque fois d'une unité. Pour composer les n+1 éléments il aura fallu ouvrir en tout n parenthèses : k_1 devant a_1 ,..., k_n devant a_n (avec $k_i \geq 0$) et l'on voit immédiatement qu'on doit avoir $k_i + k_{i+1} + \ldots + k_n \leq (n+1-i)$ (le nombre total de parenthèses ouvertes depuis a_{i-1} vers la droite ne peut dépasser (n+1-i). Le monôme correspondant à $(k_1, .., k_n)$ est donc un monôme d'arborescence bifurcante, et on voit que l'application des arborescences bifurcantes de degré n sur les schémas à n parenthèses ouvrantes est bijective.

.../...

Exemple.

Le schéma $((a_1\ (a_2\ (a_3 a_4\ (a_5 a_6$ (où on peut rétablir si l'on veut les parenthèses fermantes 3 après a_4 , 2 après a_6) est une arborescence bifurcante de degré 5 représentée par la suite (2,1,1,0,1) ou par le monôme $u_1^5 u_2^3 u_3^2 u_4^1 u_5^1$.

On peut représenter un tel schéma par un graphique dont l'aspect a donné le nom d'arborescence bifurcante (BERGE, p. I57).



Les r. parenthèses sont représentées par les sommets non nommés de la figure.

Opérateurs V_i . Soit V_i l'opération qui consiste à introduire une parenthèse devant le i ème élément de E à composer. On voit immédiatement que $V_j V_i = V_i V_{j+1}$ si $j > i$. On reconnaît la relation (1) du B No 2, sauf que le signe $>$ remplace le signe $\geq$. Il en résulte qu'on peut mettre les produits de V_i sous une forme canonique avec des indices non décroissants.

Par exemple, le schéma précédent peut se représenter par

$$V_1 V_2 V_1 V_2 V_3 = V_1 V_1 V_3 V_2 V_3 = V_1 V_1 V_2 V_4 V_3 = V_1 V_1 V_2 V_3 V_5$$

la dernière étant la forme canonique. Il est clair que toute arborescence bifurcante peut se représenter par un produit de V_i (mais non réciproquement).

Associativité.

Si on impose en plus pour toute suite d'éléments de E, soit S : $V_i^2 S = V_i V_{i+1} S$, on dit que l'opération binaire est associative. On retombe alors sur le demi groupe réticulé des t_i et toute arborescence

.../...

bifurcante de degré n peuvent alors se représenter par un produit de n-1 facteurs V_i à indices strictement croissants dont le plus grand est n-1 (B 2 première forme canonique). On peut alors introduire ou supprimer arbitrairement les parenthèses.

Si $S = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$

$$V_i^2 \; S = a_1 \ldots ((a_i a_{i+1}) \, a_{i+2}) \ldots a_n$$

et $$V_i V_{i+1} \; S = a_1 \ldots (a_i (a_{i+1} a_{i+2})) \ldots a_n$$

D. PARTITIONS

I. Treillis des sommes secondes.

Soit un groupe abélien ordonné G, et une suite d'éléments de G, positifs ou nuls

$$S_0 \qquad k_1 , k_2,\ldots,k_n,\ldots \qquad\qquad k_i \geq 0$$

A la suite S_o correspond une composition généralisée dans le groupe G. (La théorie précédente des Nos B et C a été faite en prenant G = Z, groupe abélien additif des entiers rationnels).

Etant donné une suite S_p quelconque, nous définirons la suite S_{p+1} formée par les h'_i tels que si $S_p = (h_1,\ldots,h_n,\ldots)$,

$h'_i = \sum_1^i h_i$, la suite $S_{p+1} = (h'_1,\ldots,h'_n)$ appelée somme d'ordre p permet immédiatement de retrouver S_p, car $h_{k+1} = h'_{k+1} - h'_k$

Exemple.

Si on prend $S_o = (1,\ldots 1,\ldots)$ suite dont tous les éléments sont égaux à 1, et qu'on forme les suites S_1, S_2, S_p,... etc le tableau obtenu donne lu en diagonale les coefficients binomiaux. Si on part d'une suite S_o quelconque ($k_i \geq 0$), la suite S_1 est formée d'entiers strictement positifs (composition No B), et qui de plus sont non décroissants. Lue en sens inverse, cette suite donne les exposants successifs du monôme M(C') (C, No 4) correspondant à la suite S_1.

Exemple.

La composition généralisée C'= 3 2 0 1 correspond en sens inverse la suite $S_o = (1,0,2,3)$; $S_1 = (1,1,3,6)$ $M(C') = u_1^6 u_2^3 u_3^1 u_4^1$

.../...

Si on forme la suite S_2 , S_1 étant à termes tous positifs, S_2 sera une suite d'éléments strictement positifs, telle que la suite des différences des termes (c'est à dire S_1) soit positive non croissante.

PROPOSITION.

Soit un groupe abélien G ordonné noté additivement et une suite d'éléments de G : v_i , satisfaisant à la condition $v_i \in S_2$, c'est à dire $v_{i+1} - v_i \geq v_i - v_{i-1}$, la famille des suites S_2 contenant un nombre fini d'éléments a une structure de demi groupe réticulé abélien (non distributif).

Soient deux suites v_i et v'_i toutes deux de la famille S_2. Je dis que $w_i = \sup (v_i, v'_i) \in S_2$. On peut supposer $v_i \leq v'_i$. Il faut distinguer 4 cas

a) $v_{i-1} \leq v'_{i-1}$; $v_{i+1} \leq v'_{i+1}$

$$w_{i+1} - w_i = v'_{i+1} - v'_i \geq v'_i - v'_{i-1} = w_i - w_{i-1}$$

b) $v_{i-1} \leq v'_{i-1}$; $v_{i+1} \geq v'_{i+1}$

$$w_{i+1} - w_i = v_{i+1} - v'_i \geq v'_{i+1} - v'_i \geq v'_i - v'_{i-1} = w_i - w_{i-1}$$

c) $v_{i-1} \geq v'_{i-1}$; $v_{i+1} \leq v'_{i+1}$

$$w_{i+1} - w_i = v'_{i+1} - v'_i \geq v'_i - v'_{i-1} \geq v'_i - v_{i-1} = w_i - w_{i-1}$$

d) $v_{i-1} \geq v'_{i-1}$; $v_{i+1} \geq v'_{i+1}$

$$w_{i+1} - w_i = v_{i+1} - v'_i \geq v'_{i+1} - v'_i \geq v'_i - v'_{i-1} \geq v'_i - v_{i-1} = w_i - w_{i-1} .$$

Si donc on définit une relation d'ordre partiel, entre les suites (v_i) et $(v'_i) \in S_2$, à savoir $(v_i) \leq (v'_i)$ si et seulement si $v_i \leq v'_i$ pour tout i, on voit que deux suites quelconques ont un plus petit majorant commun, appartenant à S_2 , à savoir $w_i = \sup (v_i, v'_i)$.

.../...

Des suites finies admettent aussi un plus grand minorant commun, mais qui n'est pas défini par inf (v_i , v'_i) qui n'appartient pas en général à la famille comme le montre l'exemple $(v_i) = 7,9,12,20$ et $v'_i = 2,8,14,20$ la suite 2,8,12,20 n'appartenant pas à S_2. Mais on a le

LEMME. Etant donné une suite (v_i) finie quelconque, il existe une suite unique $w_i \in S_2$ supérieure à toutes les suites inférieures à (v_i) et appartenant à S_2.

Soit en effet une suite (v_i) finie, quelconque appartenant à S_2 - $(v_i) = v_1 ,\ldots,v_n$. Il existe au moins une suite inférieure à v_i appartenant à S_2 , par exemple $(0,\ldots,0, v_n)$. Le plus petit majorant commun t_i de toutes les suites de S_2 , inférieures à v_i appartient aussi à S_2 et le lemme est établi.

Si on prend maintenant deux suites v'_i , v''_i appartenant à S_2 et pour $v_i = (\text{inf. } v'_i , v''_i)$, la suite t_i du lemme est supérieure à tous les minorants communs de v'_i et v''_i , et appartient à S_2.

2. Partitions.

On appelle partition (au sens de la théorie des nombres) toute composition généralisée C" de la forme $(k_1 ,\ldots,k_h)$ ($k_i \geqslant 0$ où $k_i \geqslant k_{i+1}$)

Toute partition peut s'obtenir à partir d'une composition généralisée quelconque, en l'écrivant en sens inverse et en faisant la somme S_1 (cf No1).

Si on écrit le monôme M (C') relatif à une partition quelconque, les exposants du monôme $u_1^{p_1} ,\ldots, u_n^{p_n}$ auront pour propriétés que $p_{i+1} - p_i \geqslant p_i - p_{i-1}$. D'après le raisonnement du No 2, ces monômes constituent donc un treillis multiplicatif.

a) le produit de deux monômes partitions, produit ordinaire des monômes est encore un monôme partition.

.../...

b) Le PPCM au sens usuel de deux monômes partitions est encore un monôme partition.

c) Le PGCD de deux monômes partitions M, M' est en général un monôme composition généralisée, mais il existe un monôme partition qui est multiple de tous les monômes partitions diviseurs communs à M, M'.

En particulier, les partitions de degré n (telles que $k_1 + \ldots k_h = n$) constituent un sous treillis, le PPCM et le PGCD de deux telles partitions étant de degré n.

Exemple. Treillis des partitions pour n = 7

1^7 $\quad 2^1 1^5 \quad 2^2 1^3 \quad 2^3 1$

$\quad\quad\quad 31^4 \quad 321^2 \quad 32^2$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad 3^2 1$

$\quad\quad\quad\quad 41^3 \quad 421 \quad 43$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad 51^2 \quad 52$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 61 \quad\quad 7$

un monôme situé à gauche ou au dessus est multiple d'un monôme situé à droite ou en dessous dans le treillis. On voit que l'ordre du treillis ne coincide pas avec l'ordre lexicographique des hauteurs. Sur une même verticale sont situées les partitions de n en un même nombre de parties positives, sous forme de hauteurs croissantes.

Par exemple, les partitions $3^2 1$ et 41^3 correspondent respectivement aux monômes $u_1^7 u_2^4 u_3$ et $u_1^7 u_2^3 u_3^2 u_4$ dont le PPCM est $u_1^7 u_2^4 u_3^2 u_4^1$ correspondant à la partition 321^2 comme on le voit sur le schéma.

3. Partition conséquente. Partition conjuguée.

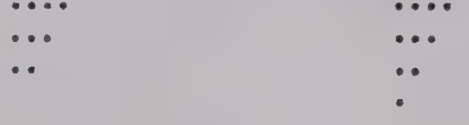
Soit la partition $(k_1, \ldots, k_h)$ où $k_i \geqslant k_{i+1}$ et $k_h > 0$. On appelle partition conséquente de $(k_1, \ldots, k_h)$ la partition obtenue en retranchant 1 de chaque k_i. Elle contiendra h termes si $k_h \geqslant 1$, h-1 termes si $k_h = 1$.

.../...

Sur le monôme $u_1^{p_1} \ldots u_h^{p_h}$ avec $p_i = \sum_i^h k_j$, l'opération reviendra à diminuer $p_h = k_h$ de 1 unité, p_i de h-i+1.

Il est commode d'utiliser le schéma de Young-Ferrer pour représenter k_1 , k_h. On dispose k_i points dans les k_i premières colonnes et la ième ligne d'un tableau. Dans ces conditions le nombre retranché à $\Sigma k_i = n$ pour obtenir la partition conséquente est le nombre de lignes du schéma, et le schéma de la partition conséquente s'obtient en supprimant la première colonne du schéma.

Exemple : le schéma A et le schéma B



représentent respectivement les partitions (5,4,3,3,2) et (4,3,2,2,1) dont la deuxième est conséquente de l'autre. La somme I2 des termes de B est inférieure de 5 (nombre de lignes de A, ou d'éléments de la première colonne de A) au nombre I7 somme des termes de A.

Les conséquences successives sont C ... (total 7); D .. (total 3)

et E. (total 1). Il en résulte

que la partition représentée par le schéma transposé correspondra au monôme

$$u_1^{I7}\ u_2^{I2}\ u_3^{7}\ u_4^{3}\ u_3^{1} \ ,$$

c'est à dire (5,5,4,2,1).

Définition.

On appelle partitions conjuguées deux partitions correspondant à deux schémas de Young-Ferrer transposés, l'un de l'autre.

On a la propriété I. On obtient le monôme représentant la partition conjuguée d'une partition A en prenant les degrés successifs de A et de ses conséquentes.

Remarque.

Sur les monômes en u eux mêmes on peut faire le schéma :

.../...

I7	I2	8	5	2
I2	8	5	3	1
7	4	2	1	
3	1			
1				

où on a écrit les degrés successifs des monômes conséquents de A sur une même ligne. Si on lit par colonnes, on a les degrés successifs de la partition conjuguée de ses conséquentes.

Propriété II.

Si un monôme partition A est multiple du monôme partition B, le monôme partition conjugué B' de B est multiple de A' conjugué de A.

En effet, si l'on revient à l'interprétation géométrique des u_i (C No 4) multiplier un monôme partition par u_i revient dans le schéma de Young à faire passer un point de la ième ligne dans la i + 1ème. On n'obtient pas ainsi forcément un schéma d'Young, mais quand on en obtient un, cela revient à faire passer un point d'une colonne dans une colonne précédente, par exemple de la j-ième à la h ième avec $h < j$.

Le monôme correspondant à la partition conjuguée du premier schéma étant par exemple

$A = u_1^n \dots u_h^{p_h} \dots u_j^{p_j} \dots u_k^{p_k}$, la multiplication par u_i de A, sera tel que $(u_i A)' = u_1^n \dots u_h^{p_h} \dots u_j^{p_j - 1} \dots u_k^{p_k}$ c'est à dire un diviseur de A'.

Remarque.

On reconnaît que la partition B est multiple de la partition A, si on peut passer du schéma de A au schéma de B en déplaçant des points de lignes d'indices inférieurs vers des lignes d'indices supérieurs, ou de colonnes d'indices supérieurs vers des colonnes d'indices inférieurs.

Propriété III.

Le conjugué du plus grand antécédent commun est le plus petit majorant commun des conjugués.

.../...

Car si A et B sont deux monômes partitions, A' et B' leurs conjugués, et R le plus grand antécédent commun de A et B. R' est majorant commun à A' et B', d'après la propriété II, et les diviseurs de R qui sont des partitions sont les diviseurs (partitions) communs à A et B, dont les conjugués sont les multiples communs à A' et B'. R' est donc bien le PPCM de A' et B'.

PROPRIETE IV.

Le treillis des partitions de degré n est autodual. Il y a correspondance bijective (par la conjugaison) entre les partitions comprises entre A et B (du point de vue de la divisibilité) et les partitions comprises entre B' et A'. En particulier le nombre de diviseurs de P est le nombre de multiples de P'. Une partition autoconjuguée a autant de diviseurs que de multiples.

E. TRESSES

1. Groupe engendré par les T_i. Considérons le groupe engendré par $2n+1$ générateurs T_i et T_i^{-1} $(0 \leq i \leq n)$, où T_0 est élément neutre, et T_i^{-1} l'inverse de T_i, liés par les relations :

a) $T_i T_j = T_j T_i$ si $j \neq i+1$ et $j \neq i-1$

b) $T_i T_{i+1} T_i^{-1} = T_{i+1}^{-1} T_i T_{i+1}$; $T_i^{-1} T_{i+1} T_i = T_{i+1}^{-1} T_i T_{i+1}$

Soit un ensemble de $n+1$ objets $(1,\ldots,n+1)$ et une permutation quelconque de ces objets $(k_1,\ldots,k_{n+1})$, si on désigne par T_i' $(0 \leq i \leq n)$ l'opération qui consiste à échanger k_i et k_{i+1}, on voit que les T_i' vérifient les axiomes (a,b,c). On a même dans cet exemple $T_i' = T_i'^{-1}$. Les axiomes (a,b,c) reviennent donc à affecter les échanges T_i' d'un exposant positif ou négatif. On est conduit à faire cette distinction quand les objets i, i+1 sont par exemple des points du plan alignés et qu'on veut exprimer qu'on fait tourner l'objet i dans un certain sens d'un demi tour autour de l'objet i+1, ou ce qui revient au même si les objets représentent des fils parallèles dans un même plan que l'on échange par une rotation d'un demi tour autour de l'axe du fil occupant la i+1ème place (tresses). Soit un élément quelconque du groupe d'Artin $\Pi T_i^{a_i} = T$, les a_i étant des entiers positifs ou nuls. Il lui correspond une permutation $s(T) = \Pi T_i'^{a_i}$ des noms des places occupées

.../...

par les éléments $(1,\ldots,n)$.

T et T^o étant deux éléments du groupe, on aura évidemment

$$s\,(T\,T^o) = s\,(T)\;s\,(T^o).$$

Il est le plus souvent commode, au lieu de considérer des permutations des places occupées par les éléments, de considérer les permutations des éléments $(1,\ldots,n)$ eux mêmes. (cf N° 3)

2. Permutation des éléments et permutation des places.

Etant donné le symbole $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & & i_n \end{pmatrix}$ où $i_1, \ldots, i_n$ désigne une permutation des indices $1,\ldots,n$, on peut l'interpréter de deux manières différentes :

a) ou bien on considère que l'élément p devient i_p. On a alors ce qu'on peut appeler une "permutation des éléments" $(1,\ldots,n)$ (PE).

b) ou bien on peut considérer que l'élément occupant la pième place occupe la place d'ordre i_p après l'opération : on a alors une permutation des places (PP), que nous mettrons entre crochets.

Le produit de deux permutations d'éléments n'est pas identique au produit des permutations de places correspondantes (Cf WEYL, p.II5).

On a par exemple :

$$\begin{bmatrix} 1234 \\ 1342 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1234 \\ 3214 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1234 \\ 3421 \end{bmatrix}$$

(l'élément de la 3ème place passe à la place 1 par la PP de droite, et reste à la première par la PP de gauche), tandis que

$$\begin{pmatrix} 1234 \\ 1342 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 3214 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4312 \end{pmatrix}$$

il existe des relations simples entre les PP et les PE.

.../...

Problème I.

Etant donné la suite d'indices $(i_1,\ldots,i_n)$ quelle est la PP qu'il faut lui appliquer pour obtenir le même résultat qu'en lui appliquant la PE $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ j_1 & & j_n \end{pmatrix}$

On peut se ramener à la permutation naturelle $(1,2,\ldots,n)$ en appliquant à $i_1,\ldots,i_n$ la PP $\begin{bmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & & i_n \end{bmatrix}^{-1} = [s]^{-1}$, puis sur la suite $(1,\ldots,n)$ effectuer la PP $\begin{bmatrix} 1 & \cdots & n \\ j_1 & & j_n \end{bmatrix}$, enfin effectuer sur la suite obtenue la PP $[s]$. Si par $[s]^{-1}$ l'objet i_p est porté à la h-ième place,, il est alors d'abord transformé en j_p, qui est ramené à la p-ième place de la h-ième par $[s]$. On peut donc écrire la relation

$$[s]\,[t]\,[s]^{-1}\,(i_1,\ldots,i_n) = t\,(i_1,\ldots,i_n).$$

ou en se ramenant à la suite naturelle $(1,2,\ldots,n)$, $[s][t] = ts$.

PROPRIETE. Les permutations de places et les permutations d'éléments se composent suivant des lois opposées.

Le produit $[s][t] = ts$, les éléments entre crochets étant des PP, et les éléments s,t des PE.

Il en résulte que $[s]\,t = t\,[s]$, car s et $[s]$ ont le même effet sur la suite naturelle $(1,\ldots,n)$.

3. Application aux tresses.

Revenons à la formule du N° 1.

$$s(T)\,s(T^o) = s(TT^o)$$

T et T^o étant deux éléments du groupe d'Artin, et où les $s(T)$, $s(T^o)$ sont des permutations portant sur les places des éléments.

.../...

D'après le N° 2, si $u(T)$, $u(T^o)$ sont les permutations correspondantes portant sur les noms des éléments,

$$s(T)\, s(T^o) = u(T^o)\, u(T) \quad \text{ou} \quad u(T) = s(T_o)^{-1}\, s(T^o)\, s(T_o).$$

D'ailleurs si $T = \prod T_i^{a_i}$ $\quad T^o = \prod T_j^{o\, a'_j}$, on peut écrire en faisant intervenir des échanges $U_i, \ldots, U_j^o$ portant sur les éléments et non sur leur place $T = \prod U_i^{b_i}$ $\quad T^o = \prod U_j^{o\, b'_j}$

et dans ces conditions, on a la formule

$$(1) \qquad T\, T^o = \prod s\,(T_o)^{-1} U_j^{o\, b'_j}\; s(t_o) \prod U_i^{b_i}$$

Remarque.

Les opérations P et S de DEDO reviennent respectivement à trouver, étant donné T et T^o :

a) pour $P\,(T, T_o) = X$, tel que $TT^o = XT$; b) pour S $TT^o = T^oX$. Il suffit d'appliquer la formule (1) précédente.

Exemple.

Soit à effectuer $T_1^{-1}T_2^{-1}T_3T_2T_1 = T_3^{-1}T_2^{-1}T_1T_2T_3$ par application des axiomes d'Artin. On a pour les deux membres les deux suites de permutations

1234		1234	
2134		1243	
2314	ou	1423	qui donnent deux tresses équivalentes.
2341		4123	
2431		4213	
4231		4231	

En représentant par (ij) l'échange des deux éléments i, j, les deux membres s'écrivent

$$(12)^{-1}\ (13)^{-1}(14)^1(43)^1(42)^1 = (34)^1(42)^1(41)^1(12)^{-1}(13)^{-1}.$$

.../...

CHAPITRE II

SYMETRISEURS ET ANTISYMETRISEURS.

A -Algèbre du groupe symétrique

Calcul des symétriseurs et antisymétriseurs.

1. Définition d'un antisymétriseur.

Soit S_n le groupe symétrique des permutations de n indices. Nous désignerons par la notation $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ la permutation s, tel que $s\,p = i_p$, et nous pourrons nous abstenir d'écrire les colonnes pour lesquelles $q = i_q$, c'est à dire les cycles d'ordre 1. Dans cette notation, considérée comme opération sur les couples $\begin{pmatrix} p \\ i_p \end{pmatrix}$, on voit que l'opération o est commutative.

Nous désignerons par A_n l'algèbre du groupe S_n sur un anneau commutatif unitaire, que nous supposerons le plus souvent être l'anneau Z des entiers rationnels.

On appellera antisymétriseur des indices distincts $i_1,\dots,i_k$ pris dans cet ordre, un élément $a \in A_n$ et désigné par $a = (i_1 \wedge \dots \wedge i_k)$ tel que

$$(2) \qquad a = (i_1 \wedge \dots \wedge i_k) = \sum \varepsilon_s \begin{pmatrix} i_1 & & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix}$$

la somme $\sum$ étant étendue aux k! permutations $j_1,\dots,j_k$ des indices $i_1,\dots,i_k$, ε_s désignant la signature de la permutation $\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix}$

.../...

On appellera symétriseur et on désignera par $a^+ = (i_1 o \ldots o i_k)$ l'élément de A_n : $a^+ = (i_1 o \ldots o i_k) = \sum \begin{pmatrix} i_1 & & i_k \\ j_1 & o \ldots o & j_k \end{pmatrix}$, la somme étant étendue aux mêmes permutations que a, mais sans alternance de signes.

Toutes les propriétés de ce paragraphe A seront valables aussi bien pour les antisymétriseurs que pour les symétriseurs. Nous nous bornerons à étudier le cas des antisymétriseurs, celui des symétriseurs s'en déduisant en remplaçant ε_s par 1. D'autre part, pour abréger l'écriture, nous supprimerons le signe o dans l'écriture d'une permutation si cela n'entraîne pas d'ambiguité.

Exemple. Pour n = 4

$$a = (3 \wedge 1 \wedge 4) = \begin{matrix}1234\\3214\end{matrix} + \begin{matrix}1234\\1243\end{matrix} + \begin{matrix}1234\\4231\end{matrix} - \begin{matrix}1234\\3241\end{matrix} - \begin{matrix}1234\\1234\end{matrix} - \begin{matrix}1234\\4213\end{matrix}$$

Comme conséquences immédiates de la définition, on a :

PROPRIETE I.

Un antisymétriseur est transformé en son opposé dans A_n si on permute deux indices; un symétriseur reste invariant par une transposition d'indices.

PROPRIETE II.

Si $j_1, \ldots, j_k$ est une permutation des indices $i_1, \ldots, i_k$ on a $(j_1 \wedge \ldots \wedge j_k) = (-1)^{I+J} (i_1 \wedge \ldots \wedge i_k)$, I et J étant respectivement les nombres d'inversions des suites i_p et j_p.

2. Sous groupe lié à un antisymétriseur.

Soit $a = (i_1 \wedge \ldots \wedge i_k)$ un antisymétriseur. Les permutations s des k indices i_p laissant invariants les n-k autres indices, au nombre de k!, constituent évidemment un sous groupe G_a de S_n appelé groupe lié à l'antisymétriseur a. On peut écrire $a = \sum_{s \in G_a} \varepsilon_s s$, ε_s étant la signa-

.../...

ture de la permutation s, avec $s \in G_a$.

PROPRIETE III.

Produit d'un antisymétriseur par une permutation appartenant à son groupe lié.

Si $s \in G_a$, groupe lié à l'antisymétriseur a, on a

$sa = as = \varepsilon_s\, a$ (avec les notations précédentes).

Même raisonnement pour as. On en déduit :

PROPRIETE IV.

Un antisymétriseur a vérifie la relation

$a^2 = k!\, a$.

Plus généralement, on a la Propriété IV'. Le produit de deux antisymétriseurs tels que tous les indices de b en nombre h figurent parmi les indices de a est commutatif, et on a

$ab = ba = h!\, a$ (si les indices de b sont écrits dans le même ordre que ceux de a).

Ici le groupe G_b lié à b est évidemment un sous groupe de G_a. Toute permutation $s \in G_b$, ... - - - , appartient aussi à G_a et donc

$sa = as = \varepsilon_s\, a$, et comme $b = \sum \varepsilon_s s$, la propriété IV' est établie.

3. Antisymétriseurs complémentaires.

Soit $a = (i_1 \wedge \ldots \wedge i_k)$ un antisymétriseur. Désignons par $(i'_1 \wedge \ldots \wedge i'_{n-k})$ l'antisymétriseur formé avec les n-k indices ne figurant pas parmi les i, et de sorte que la suite $i_1, \ldots, i_k, i'_1, \ldots, i'_{n-k}$ soit paire. $a' = (i'_1 \wedge \ldots \wedge i'_{n-k})$ est dit le complémentaire de G_a. La relation "complémentaire " entre antisymétriseurs (ou entre groupes liés) est évidemment symétrique.

.../...

On a les propriétés suivantes :

PROPRIETE V.

Si a est un antisymétriseur, et si $s \in G_a$, (a' complémentaire de a, sa = as.

Car avec les hypothèses faites si $t \in G_a$, st = ts, et par suite comme $a = \Sigma(1)^{I+M} t$, si $ti_p = m_p$, as = sa.

Conséquence.

Le produit de deux antisymétriseurs n'ayant aucun indice en commun est commutatif, (ab = ba)

Car alors $G_b \subseteq G_{a'}$, et si $G_b = \Sigma \varepsilon_s s$, avec $b = (j_1 \wedge \ldots \wedge j_h)$

$ab = a(\Sigma \varepsilon_s s) = \varepsilon_s \Sigma as = (\Sigma \varepsilon_s s) a = ba.$

Remarque.

Le complexe $G_a G_b$ est ici un groupe.

4. Déterminoides. Définition.

Un déterminoide est le produit par une permutation d'antisymétriseurs sans indices communs.

Si s est une permutation, et $a_1, \ldots, a_p$ des antisymétriseurs sans indices communs, donc permutables, un déterminoide D s'écrira

$$D = s\, a_1 a_2 \ldots a_p.$$

On peut toujours supposer que le nombre d'éléments k_i de a_i , est supérieur ou égal à k_{i+1} ; et ainsi à tout déterminoide on pourra faire correspondre un schéma de Young-Ferrer correspondant à la partition $k_1 + \ldots + k_p = n$ de n en nombres entiers positifs non croissants.

Dans ce schéma, nous donnerons à chaque ligne du tableau k_i éléments affectés d'un indice supérieur qui seront les indices de a_i soit i_q et d'un indice inférieur qui sera $s\, i_q$. Enfin, nous conviendrons d'écrire les lignes du schéma de Young bout à bout en les séparant par des traits verticaux.

.../...

C'est ainsi que pour n = 6, par exemple le déterminoide

$$D = \binom{123456}{3452I6}\ (1 \wedge 3 \wedge 4\ \ ) (2 \wedge 6) (5) = \left|\begin{matrix}134\\352\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}26\\46\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\right|$$

Chaque ligne du schéma de Ferrer, séparée par deux traits verticaux sera appelée "mineur" du déterminoide. Le nombre k_i est appelé ordre du mineur. On a le

Théorème de LAPLACE. Tout antisymétriseur a peut s'écrire (d'une manière non unique) comme somme de déterminoides où les indices supérieurs ont un ordre fixe (à savoir l'ordre des indices de a).

Soit en effet $a = (i_1 \wedge \ldots \wedge i_k)$ un antisymétriseur. Partageons la suite des k indices $i_1,\ldots,i_k$ en p groupements, le j ème contenant k_j indices, de telles manières que $\sum k_j = k$, et soient $a_1,\ldots, a_p$ les antisymétriseurs correspondant à chacun de ces groupements d'indices, G_{a_i} étant le groupe lié à l'antisymétriseur a_i.

Le produit $G_{a_1} \ldots G_{a_p} = H$ est un groupe, sous groupe de G_a. On a

$a = \sum \varepsilon_{s_u} s_u\ a_1 \ldots a_p$, somme étendue à tous les représentants s_u de classes à gauche de G_a suivant H, le nombre de termes de la somme étant $\dfrac{k!}{k_1! \ldots k_p!}$ (ordre de G_a : ordre de H).

Pour obtenir une classe à gauche, il suffit d'écrire un déterminoide dont la ligne supérieure est formée des indices de $a_1,\ldots,a_p$ rangés dans un ordre tel que la suite des indices soit de même parité que $i_1,\ldots i_k$; b) la ligne inférieure contienne une permutation $m_1,\ldots,m_k$ de même parité que $i_1,\ldots,i_k$, deux permutations m_p correspondant à la même classe si les lignes inférieures de chaque mineur contiennent les mêmes éléments à l'ordre près.

Exemple. $a = (1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4)$ $a_1 = (1 \wedge 2)$ $a_2 = (3 \wedge 4)$

$$(1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4) = \left|\begin{matrix}12\\12\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}34\\34\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}12\\13\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}34\\42\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}12\\14\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}34\\23\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}12\\23\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}34\\14\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}12\\24\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}34\\31\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}12\\34\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}34\\12\end{matrix}\right|$$

Formule de Laplace duale.

Au lieu de considérer les classes à gauche de G_a suivant H, on peut considérer les classes à droite. Si s_u est un représentant d'une classe à gauche s_u^{-1} est un représentant d'une classe à droite. On obtient ainsi une nouvelle expression de l'antisymétriseur a sous forme de somme de déterminoides,

.../...

qui se déduit de la précédente en permutant les indices inférieurs et les indices supérieurs, et que nous appellerons " formule de Laplace duale ". Ce sont ici les indices inférieurs qui gardent le même ordre dans tous les déterminoides.

Exemple :

$$(1\wedge 2\wedge 3\wedge 4) = \begin{vmatrix}12\\12\end{vmatrix}\begin{vmatrix}34\\34\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}13\\12\end{vmatrix}\begin{vmatrix}42\\34\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}14\\12\end{vmatrix}\begin{vmatrix}23\\34\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}23\\12\end{vmatrix}\begin{vmatrix}14\\34\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}24\\12\end{vmatrix}\begin{vmatrix}31\\34\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}34\\12\end{vmatrix}\begin{vmatrix}12\\34\end{vmatrix}$$

5. Produit d'un antisymétriseur par une permutation. Transmué d'un antisymétriseur.

Soit l'antisymétriseur $a = (i_1 \wedge \ldots \wedge i_k)$, on peut l'écrire sous forme de déterminoide $a = \begin{vmatrix} i_1 & & i_k \\ i_1 & & i_k \end{vmatrix}\begin{vmatrix} i_{k+1} \\ i_{k+1} \end{vmatrix} \ldots \begin{vmatrix} i_n \\ i_n \end{vmatrix}$

Par définition du déterminoide, si s est une permutation telle que $s\, i_p = m_p$, on a $s\, a = \begin{vmatrix} i_1 \ldots i_k \\ m_1 \ldots m_k \end{vmatrix}\begin{vmatrix} i_{k+1} \\ m_{k+1} \end{vmatrix} \ldots \begin{vmatrix} i_n \\ m_n \end{vmatrix}$

Produit d'un déterminoide par une permutation.

Plus généralement si D est un déterminoide, et si s est une permutation, telle que $si_p = m_p$, pour effectuer le produit sD, on gardera les indices supérieurs de D et on remplacera i_p par m_p dans les indices inférieurs.

Exemple $s = \begin{matrix}12345\\34215\end{matrix}$ $\quad D = \begin{vmatrix}124\\135\end{vmatrix}\begin{vmatrix}35\\24\end{vmatrix} \quad sD = \begin{vmatrix}124\\325\end{vmatrix}\begin{vmatrix}35\\41\end{vmatrix}$

Produit à droite d'un déterminoide par une permutation.

Si a est un antisymétriseur $a = (i_1 \wedge \ldots \wedge i_k)$ et $s\, i_p = m_p$ une permutation, calculons as^{-1}. Comme $s^{-1}\, m_p = i_p$, on voit que

$$as^{-1} = \begin{vmatrix} m_1 \ldots m_k \\ i_1 \ldots i_k \end{vmatrix}\begin{vmatrix} m_{k+1} \\ i_{k+1} \end{vmatrix} \ldots \begin{vmatrix} m_n \\ i_n \end{vmatrix}$$

as^{-1} se déduit de sa en échangeant la ligne inférieure et la ligne supérieure

.../...

du déterminoide. Il en résulte en particulier que

$s\,(i_1 \wedge \ldots \wedge i_k) = (m_1 \wedge \ldots \wedge m_k)\,s$. Donc le transmué sas^{-1} d'un antisymétriseur par une permutation s'obtient en remplaçant les éléments de a par leurs transformés dans s.

Plus généralement pour effectuer le produit Ds^{-1} du déterminoide D par une permutation s^{-1}, telle que $si_p = m_p$, on voit immédiatement que le produit est un déterminoide obtenu en gardant inchangée la ligne inférieure de D, et en remplaçant dans la ligne supérieure i_p par m_p.

Exemple $s = \begin{matrix}12345\\34215\end{matrix}$ $\quad D = \left|\begin{matrix}124\\135\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}35\\24\end{matrix}\right| \quad Ds = \left|\begin{matrix}432\\I35\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}15\\24\end{matrix}\right|$

Transmué d'un déterminoide par une permutation.

Désignons par $a^s = sas^{-1}$, et soit $D = t\,a_1 \ldots a_p$ un déterminoide (t permutation, a_i antisymétriseur). Il vient $D^s = t^s\, a_1^s \ldots a_p^s$ formule qui donne le transmué D^s de D puisqu'on sait trouver les transmués des a_i.

6. Produit de deux antisymétriseurs quelconques.

Nous allons indiquer deux méthodes permettant de mettre le produit de deux antisymétriseurs sous forme de somme de déterminoides.

Soient $a = (i_1 \wedge \ldots \wedge i_k \wedge i'_1 \wedge \ldots \wedge i'_{k'})$ et $b = (i_1 \wedge \ldots \wedge i_k \wedge j_1 \wedge \ldots \wedge j_h)$ deux antisymétriseurs, où on a mis en évidence les indices communs i_p.

a) On peut calculer $ab = \sum \pm s_i\, b$, pour toutes les permutations $s_i \in G_a$

comme $sb = \left|\begin{matrix}i_1 & \ldots & i_k & j_1 & \ldots & j_h\\ si_1 & \ldots & si_k & j_1 & \ldots & j_h\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}i'_1\\si'_1\end{matrix}\right| \ldots \left|\begin{matrix}i'_k\\si'_k\end{matrix}\right|$

Il reste à faire la somme pour toutes les permutations s_i avec le signe convenable. On obtient ainsi

$$(1)\quad ab = k!\sum \left|\begin{matrix}i_1 \ldots i_k & j_1 \ldots j_h\\ m_1 \ldots m_k & j_1 \ldots j_h\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}i'_1 \ldots i'_{k'}\\ m'_1 \ldots m'_{k'}\end{matrix}\right| (-1)^{I+M}$$

La somme $\sum$ étant étendue aux $\frac{(k+k')!}{k!k'!}$ combinaisons k à k, $(m_1, \ldots, m_k)$ des indices i_p et i'_p et M étant le nombre d'inversions de la suite $m_p m'_q$

.../...

Le nombre total de termes du développement est bien $(k+k')!(k+h)!$ On obtient ainsi ab sous forme d'une somme alternée de déterminoides à deux mineurs dont le premier est d'ordre égal à celui de b, et le second a pour ordre : ordre de a - nombre d'indices communs à a et b.

b) On peut aussi faire le développement de manière duale, en multipliant à droite les permutations de a par toutes les permutations de b. Il vient par un raisonnement analogue au précédent

$$(2) \qquad ab = k! \sum (-1)^{I+N} \begin{vmatrix} n_1 \cdots n_k & i'_1 \cdots i'_{k'} \\ i_1 \cdots i_k & i'_1 \cdots i'_{k'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n'_1 \cdots n'_h \\ j_1 \cdots j_h \end{vmatrix}$$

somme de $\frac{k+h\,!}{k!\,h!}$ termes. La somme $\sum$ est ici étendue à toutes les combinaisons $n_1, \ldots, n_k$ des indices i et j figurant dans b, $(n'_1 \ldots n'_h)$ étant la combinaison complémentaire, I et N étant les nombres respectifs d'inversions des suites (i,j) et (n,n').

Le produit ab se présente alors sous forme d'une somme de déterminoides dont les indices inférieurs sont dans un ordre fixe, contenant deux mineurs dont l'un a l'ordre de a, et le second a pour ordre : ordre de b-nombre d'indices communs à a et b.

On obtient ainsi deux expressions distinctes de ab comme somme de déterminoides. Dans (1) tous les déterminoides ont leurs indices supérieurs écrits dans un ordre fixe, à savoir les indices de b et les indices de a ne figurant pas dans b. Dans (2) ce sont les indices inférieurs qui sont écrits dans un ordre fixe, les indices de a et ceux de b ne figurant pas dans a, et les indices supérieurs de b sont permutés dans la somme.

Exemple $(1\wedge 2\wedge 3)\,(3\wedge 4) = \begin{vmatrix} 12 \\ 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 34 \\ 34 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 \\ 23 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 34 \\ 14 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 \\ 31 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 34 \\ 24 \end{vmatrix}$ (1)

$$= \begin{vmatrix} 123 \\ 123 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 \\ 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 124 \\ 123 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Remarques 1.

La formule de Laplace ou la formule de Laplace duale peuvent permettre d'obtenir d'autres expressions du produit ab comme somme de déterminoides. Par exemple dans le développement (2) précédent, on peut développer $\begin{vmatrix} I23 \\ I23 \end{vmatrix}$ par une formule de Laplace et $\begin{vmatrix} 124 \\ 123 \end{vmatrix}$ par une formule de Laplace duale,

.../...

ce qui donne

$$(3)\quad \begin{vmatrix}12\\12\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3\\3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}4\\4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}12\\23\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3\\1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}4\\4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}12\\31\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3\\2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}4\\4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}12\\12\end{vmatrix}\begin{vmatrix}4\\3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3\\4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}24\\12\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1\\3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3\\4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}41\\12\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2\\3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3\\4\end{vmatrix}$$

qui est encore égal à (1) ou (2)

Remarque 2.

La formule de Laplace peut être obtenue comme cas particulier de la méthode donnant le produit d'antisymétriseurs.

Par exemple $(1\wedge 2)\ (1\wedge 2\wedge 3\wedge 4) = 2!\ (1\wedge 2\wedge 3\wedge 4)$ donne par le développement (2) la formule de Laplace duale donnée en exemple au N° 4.

Remarque 3.

Il en résulte qu'on pourra de bien des manières écrire le produit de plusieurs antisymétriseurs a_1 , a_p , a_h sous forme de somme de déterminoides. On peut toujours partir d'un facteur quelconque a_p et le multiplier à gauche par $a_1,\dots,a_{p-1}$, puis multiplier à droite le résultat par $a_{p+1}\dots a_h$. Dans tous les déterminoides obtenus le nombre d'éléments d'un des mineurs sera égal au nombre d'indices de a_p. D'une manière générale, tout produit de déterminoides peut s'écrire comme somme de déterminoides.

On peut par exemple opérer de la manière suivante pour effectuer le produit $a_1 a_2\dots a_p$. On désignera par a_i' l'antisymétriseur formé avec tous les indices de a_i qui ne figurent pas parmi les indices de $a_{i+1},\dots,a_{i_p}$

Si k_i est le nombre des indices de a_i' , on a l'égalité

$$k_1!\dots k_i!\dots k_{p-1}!\quad a_1 a_2\dots a_p = a_1 a_1'\ a_2 a_2'\ \dots\ a_{p-1} a'_{p-1} a_p$$

et en vertu du choix des a_i' , ils sont permutables avec les antisymétriseurs situés à leur droite.

$$k_1!\dots k_{p-1}!\quad a_1 a_2\dots a_p = (a_1 a_2\dots a_{p-1})\ (a_1' a_2'\dots a'_{p-1} a_p)$$

La deuxième parenthèse est un déterminoide dont on antisymétrise les indices inférieurs en multipliant à gauche par $(a_1 a_2\dots a_{p-1})$. Pour p = 2 on retrouve par une autre méthode le produit des antisymétriseurs donné par la formule (1). On retrouverait de même la formule (2) généralisée au cas de p antisymétriseurs, en considérant des antisymétriseurs a_i'' contenant les indices de a_i

.../...

qui ne figurent pas dans $a_1,\ldots,a_{i-1}$.

Exemple $(1\wedge 2\wedge 3)\ (2\wedge 3\wedge 4)\ (3\wedge 4\wedge 5\wedge 6) = (1\wedge 2\wedge 3)(2\wedge 3\wedge 4)\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}3456\\3456\end{matrix}\right|$ (1)

$$= \frac{\left|\begin{matrix}123\\123\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}4\\4\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}56\\56\end{matrix}\right|\ (2\wedge 3\wedge 4)(3\wedge 4\wedge 5\wedge 6)}{2} \quad (2)$$

Dans la formule (1) on antisymétrise **les** indices inférieurs, dans la formule (2) les indices supérieurs.

7. Egalités entre sommes de déterminoides.

Un des intérêts du calcul des antisymétriseurs est de fournir une démonstration simple d'égalités entre sommes de déterminoides.

Soit un produit d'antisymétriseurs a_i ; $a_1 \cdots a_p = P$.

On peut prélever dans chacun des a_i des antisymétriseurs $b_i^1,\ldots,b_i^h$ dont les indices obéissent aux conditions suivantes :

a) tous les indices figurant dans b_i^j appartiennent à a_i.

b) b_i^j est un antisymétriseur permutable avec tous les a_k pour $k > i$ (soit que b_i^j ait tous ses indices communs avec a_k, ou qu'il n'ait aucun indice commun avec a_k).

c) les indices de tous les b_i^j forment sans omission, ni répétition tous les indices de $a_1,\ldots,a_p$ (ce qui implique en particulier que deux antisymétriseurs b n'ont aucun indice commun.

Dans ces conditions le produit $\prod b_i^j$ est un déterminoide, comportant autant de mineurs qu'il existe d'antisymétriseurs b, et on a

$$(1) \qquad a_1 a_2 \cdots a_p \left(\prod b_i^j\right) = N \quad a_1 a_2 \cdots a_p$$

N étant un produit de factorielles facile à déterminer dans chaque cas. Or le premier membre de (1) peut s'exprimer comme une somme de déterminoides ayant tous les mêmes indices supérieurs que $\prod b_i^j$, écrits dans le même ordre et dont les indices inférieurs se déduisent de ceux de $\prod b_i^j$ par les antisymétrisations successives définies par le produit $a_1 a_2 \cdots a_p$.

.../...

On peut aussi choisir dans a_i des antisymétriseurs b'^{j}_{i} tels que la condition (b) soit remplacée par (b') : b'^{j}_{i} est un antisymétriseur permutable avec tous les a_k pour $k < i$, et on pourra écrire

$$(2)\quad (\Pi\, b'^{j}_{i})\; a_1 a_2 \ldots a_p = N'\; a_1 a_2 \ldots a_p$$

et le premier membre peut s'écrire comme une somme de déterminoides ayant les mêmes indices inférieurs que le déterminoide $\Pi\, b'^{j}_{i}$. On peut avoir des identités entre sommes de déterminoides en comparant les premiers membres d'égalités telles que : (1) ou (2). Ceci redonne une démonstration de la formule de Laplace, de la formule de Laplace duale, ainsi que du Théorème de Schwein, Exemple II, Formule 3 cf. Turnbull, p. 337).

Exemple 1. Formule de Laplace.

Soit un antisymétriseur $a = (i_1 \wedge \ldots \wedge i_k)$.

Partageons les indices $i_1, \ldots, i_k$ en groupements au nombre de p, et formons les antisymétriseurs avec ces indices $b_1, \ldots, b_p$ les indices des b_i étant deux à deux distincts. Si b_i contient k_i éléments, on aura

(1) $\quad a\, b_1 \ldots b_p = (\Pi\, k_i !)\; a$. Or on peut exprimer le premier membre sous forme d'une somme de déterminoides ayant les mêmes indices supérieurs dans le même ordre que le déterminoide $b_1 \ldots b_p$.

Exemple $a = (1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4) \qquad b_1 = (1 \wedge 2) \;,\; b_2 = (3 \wedge 4)$

d'où $(1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4)\, 4 = (1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4) \begin{vmatrix} 12 \\ 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 34 \\ 34 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 \\ 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 34 \\ 34 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 \\ 13 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 34 \\ 42 \end{vmatrix} + \ldots$

chaque terme du second membre étant répété 4 fois, ce qui donne la formule de Laplace.

Si on avait écrit $(b_1 \ldots b_p)a = \Pi\, k_i !\; a$, on aurait obtenu la formule de Laplace duale.

Exemple II. Formule de Schwein. Soient deux antisymétriseurs

$a = (i_1 \wedge \ldots \wedge i_k) \qquad a' = (i_{k+1} \wedge \ldots \wedge i_k \wedge \ldots \wedge i_h)$, les indices des i étant croissants, et où les indices communs à a et a' sont $i_{k+1} \ldots i_k$. Posons

$b_1 = (i_1 \wedge \ldots \wedge i_k) = a,\; b_2 = (i_{k+1} \wedge \ldots \wedge i_h)$

On a $b_1 a\, b_2\, a' = \qquad (h-k)!\; aa'$. Mais b_2 est permutable avec a

d'où $(b_1 b_2)\; aa' = k!\; (h-k!)\; aa'$. (1)

.../...

Soit maintenant $c_1 = (i_1 \wedge \ldots \wedge i_{k'})$, $c_2 = (i_{k'+1} \wedge \ldots \wedge i_h) = a'$.

On a $c_1 a' c_2 = k'! (h-k')! aa'$ et comme $ac_1 a' c_2 = aa' (c_1 c_2)$

$$(aa') (c_1 c_2) = k'! (h-k')! aa' \quad (2)$$

On peut simplifier les formules (1) et (2) en remarquant que $b_1 = a$; $c_2 = a'$

$$(b_1 b_2) a' = (h-k)! aa'$$

de même $a (c_1 c_2) = k'! aa'$

d'où en comparant $\underline{(h-k)! a (c_1 c_2) = k'! (b_1 b_2) a'}$ (3)

La formule (3) exprime le théorème de Schwein : le premier membre est une somme de déterminoides dont les indices supérieurs sont dans un ordre fixe, à savoir ceux de c_1 et c_2 ; le deuxième membre une somme de déterminoides dont les indices inférieurs sont fixes.

Exemple numérique. $a = (1 \wedge 2 \wedge 3)$, $a' = (3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge 6)$

$b_1 = (1 \wedge 2 \wedge 3)$, $b_2 = (4 \wedge 5 \wedge 6)$, $c_1 = (1 \wedge 2)$, $c_2 = (3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge 6)$

Ici $k' = 2$, $h-k = 3$. On a donc

$$3! \ (1 \wedge 2 \wedge 3) \begin{vmatrix} 12 \\ 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3456 \\ 3456 \end{vmatrix} = 2! \begin{vmatrix} 123 \\ 123 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 456 \\ 456 \end{vmatrix} \ (3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge 6)$$

Le premier membre est une somme de 36 déterminoides 12 à 12 égaux, le deuxième est une somme de 48 déterminoides également 12 à 12 égaux. La somme des trois termes distincts du premier membre est donc égale à la somme des 4 termes distincts du deuxième membre.

Remarque.

Quand on multiplie un déterminoide par un antisymétriseur uniquement, le nombre de déterminoides égaux est égal à $k_1! \ k_2! \ldots ! k_h!$, les k_i désignant le nombre d'indices que l'on antisymétrise dans chaque mineur.

Il est aisé de voir que les factorielles disparaissent, si on se borne à considérer les déterminoides distincts obtenus par les antisymétrisations dans la formule de Scwein.

.../...

Remarque II.

Bien entendu, on peut multiplier si l'on veut les deux membres de la formule de Schwein à gauche par une permutation s.

Dans l'exemple numérique, si $s = \begin{pmatrix} 123456 \\ abcdef \end{pmatrix}$, on en déduit l'identité

$$3!\,(a \wedge b \wedge c)\ \left|\begin{matrix} I2 \\ ab \end{matrix}\right|\ \left|\begin{matrix} 3456 \\ cdef \end{matrix}\right| = 2!\ \left|\begin{matrix} I23 \\ abc \end{matrix}\right|\ \left|\begin{matrix} 456 \\ def \end{matrix}\right|\ (3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge 6)$$

Remarque III.

Considérons deux antisymétriseurs a, a' et répartissons les indices de a' qui ne figurent pas dans a, de façon à former des antisymétriseurs b_1 , b_p , (b_i contenant k_i indices). On a

$$(1') \qquad (b_1 \ldots b_p a)\, a' = \prod k_i !\ \ aa'$$

De même nous répartissons les indices de a qui ne figurent pas dans a' en antisymétriseurs c_1 ,...., c_p, (c_i contenant k_i' indices). On a

$$(2') \qquad a\,(c_1 \ldots c_p, a') = \prod k_i'!\ aa'$$

d'où la formule

$$(3') \qquad \frac{(b_1 \ldots b_p a)\, a'}{\prod k_i !} = \frac{a\,(c_1 \ldots c_p, a')}{\prod k_i' !}$$

formule qui généralise la formule de Schwein, si l'on considère les expressions entre parenthèses dans chaque membre de (3") comme des déterminoides où l'on antisymétrise les indices supérieurs de $(b_1 \ldots b_p a)$ par a' (respectivement les indices inférieurs de $c_1 \ldots c_p a'$ par a.)

Remarque IV.

Les résultats précédents mettent en évidence que quand on effectue le produit associatif d'antisymétriseurs $a_1 a_2 \ldots a_p$, il est intéressant pour obtenir les identités entre sommes de déterminoides de noter l'ordre

.../...

dans lequel ce produit est effectué, c'est à dire l'emplacement des parenthèses successives, pour l'opération binaire.

Mais ceci ne suffit pas, car nous avons vu (N° 6) que le produit de deux antisymétriseurs peut s'obtenir de deux manières comme somme de déterminoides. Nous désignerons par V_i^+ le fait d'ouvrir une parenthèse devant le i-ème facteur et la fermer devant le i+1 ème (CH.I, C, N° 6) et d'effectuer ce produit suivant la formule 1 du N° 6; par V_i^- la même opération en effectuant le produit des antisymétriseurs suivant la formule (2) du N° 6.

Exemple. $(a_1(a_2a_3)$ se représentera par $V_1^- V_2^+ (a_1a_2a_3)$ si on effectue d'abord le produit a_2a_3 en multipliant à gauche a_3 par les permutations de a_2, puis en multipliant a_1 à droite par les permutations de tous les déterminoides formant a_2 a_3.

.../...

B. PRODUITS DE DETERMINOIDES PAR DES SYMETRISEURS.

Dans la suite, nous désignerons par $\left|\begin{matrix} j_1 & & j_k \\ j_1 & & j_k \end{matrix}\right|^+$ l'élément de A_n qui est le symétriseur des indices $j_1,\ldots,j_k$, et tous les mineurs d'un déterminoide intervenant dans un produit de symétriseurs seront mis entre traits verticaux, avec un signe + en haut, à droite. Les considérations du paragraphe précédent s'appliquent, aux questions d'alternance de signe près, aux symétriseurs.

1. Produit d'un déterminoide par un symétriseur.

PROPRIETE I.

Soit un antisymétriseur a et un symétriseur b^+ qui ont au moins deux indices en commun. On a $ab^+ = ba^+ = 0$ (en caractéristique différente de 2) (Cf par exemple Littlewood, p. 74)
Soit en effet u, v les indices communs figurant dans a et dans b^+.
On a $2a = a\,(u \wedge v)$; $2b^+ = \left|\begin{matrix} uv \\ uv \end{matrix}\right|^+ b^+$. Or on voit immédiatement que $(u \wedge v) \left|\begin{matrix} uv \\ uv \end{matrix}\right|^+ = \left|\begin{matrix} uv \\ uv \end{matrix}\right|^+ (u \wedge v) = 0$. Donc $4ab^+ = 0$, et de même $b^+a = 0$.

Ce Théorème présente des conséquences importantes pour la recherche des idempotents primitifs du groupe symétrique (Littlewood, p.74; Ruther ford, ; Weyl, p.II5 et ss; Van der Waerden, TII, p. I94).

Corollaire I.

Soit une somme S de déterminoides, telle que dans chacun un mineur ait au moins un couple d'indices (supérieurs) inférieurs en commun avec le symétriseur b^+, le produit b^+S (respectivement $S\,b^+$) est nul.

Car chacun des termes de la somme est nul dans l'algèbre du groupe symétrique A_n.

.../...

On a immédiatement la

PROPRIETE II.

Un antisymétriseur et un symétriseur n'ayant pas d'indices communs sont permutables.

2. Equivalence à droite et équivalence à gauche.

a) Module des classes doubles.

Soient deux sous groupes G et H du groupe symétrique S_n. La relation R entre deux permutations de S_n, s et t $(s,t) \in R$, si et seulement s'il existe $g \in G$ et $h \in H$, tels que $t = hsg$ est une relation d'équivalence, non compatible avec le produit des permutations. Nous appellerons classe double de S_n suivant G et H une classe d'équivalence, et nous désignerons par HsG la classe de s.

Soit Z un anneau, A_n l'algèbre du groupe symétrique sur cet anneau, on pourra définir le Z module ayant pour vecteurs de base les différentes classes doubles : soit M. On peut réaliser une application linéaire de A_n (considéré comme Z-module) sur M définie comme suit.

Si $u = a_1 s_1 + \dots a_N S_N \in A_n$, $a_i \in Z$, $s_i \in S_n$ $f(a_1 s_1) = a_1 Hs_1 G$,

$f(s_1 + s_2) = Hs_1G + Hs_2G$. Le noyau de f est engendré par les différences des permutations $s-t$, avec $(s,t) \in R$

Tout élément de M peut se mettre d'une manière unique sous la forme $v = b_1 Hs_1G + \dots + b_k Hs_kG$, les $(s_i,s_j) \in R$ et $b_i \in Z$

b) Module N des H^+sG^+.

Soit G^+ l'élément de A_n constitué par la somme des éléments de G, et $H^+ = \sum h_i$, $h_i \in H$. A tout élément $u \in A_n$, nous ferons correspondre l'élément de A_n $g(u) = H^+ u G^+$. Cette application g est linéaire de A_n dans A_n, considéré comme Z module. Si $(s,t) \in R$, $s,t \in S_n$, on a évidemment $g(s) = g(t)$, et si $(s,t) \in R$. H^+sG^+ et H^+tG^+ sont des sommes de permuta-

.../...

tions toutes distinctes. Il en résulte que $g(u_1) = g(u_2)$ entraîne $f(u_1) = f(u_2)$, et d'après la forme de $v = f(u)$ on voit immédiatement que $f(u) = 0$ entraîne $g(u) = 0$. Donc f et g ont même noyau, et on a la propriété:

PROPOSITION.

Le Z module M des classes doubles de S_n relativement aux sous groupes G et H d'éléments de la forme $v = \sum HuG$ est isomorphe au sous module N de l'algèbre A_n de S_n formé par les éléments de la forme H^+uG^+.

Nous dirons que deux éléments de A_n sont équivalents (modulo R), soit $(u,v) \in R$, si $f(u) = f(v)$, ou $g(u) = g(v)$ ce qui revient au même.

Dans la suite, nous nous bornerons au cas particulier, où G est le produit direct de groupes symétriques G_i d'indices $i_1,\ldots,i_k$, les G_i ayant des indices tous distincts (Cf A, N° 4), et de même pour H, et nous poserons $G^+ = \prod G_i^+$; $H^+ = \prod H_j^+$, G_i^+ et H_j^+ étant des symétriseurs.

Nous appellerons indices équivalents à droite (resp à gauche) deux indices appartenant à un même G_i^+ (respectivement H_i^+). Deux éléments u et u' de A_n seront équivalents à droite et on posera $u \overset{d}{=} u'$ si et seulement si $uG^+ = u'G^+$. Définition analogue pour l'équivalence à gauche notée $u \overset{g}{=} u'$ si $H^+u = H^+u'$.

3. Propriétés de l'équivalence à droite.

PROPRIETE I.

L'équivalence à droite est compatible avec la multiplication à gauche. Car $uG^+ = u'G^+$ entraîne $vuG^+ = vu'G^+, \forall\, v$

PROPRIETE II.

On obtient une permutation équivalente à droite à une permutation donnée en transposant deux indices supérieurs équivalents à droite.

Conséquence. Quand il n'y aura pas ambiguité, on pourra remplacer tous calculs faits des indices équivalents à droite par un même symbôle.

.../...

PROPRIETE III.

Un déterminoide qui a dans la ligne supérieure d'un même mineur deux indices équivalents à droite est équivalent à droite à O.
Car si $D = sa_1 a_2 \ldots a_k$ les a_i étant des antisymétriseurs disjoints (donc permutables), on a $DG^+ = O$, si a_i a deux indices communs avec un symétriseur de G (1, Propriété I, Corollaire I).

PROPRIETE IV.

Produit de deux antisymétriseurs contenant des indices équivalents à droite.

Soient deux antisymétriseurs $(a_1 \wedge i_1)$ et $(a_2 \wedge i_2)$, i_1 et i_2 étant équivalents à droite. Formons le produit $(a_1 \wedge i_1)(a_2 \wedge i_2)$ sous forme de sommes de déterminoides ayant leurs indices inférieurs écrits dans un ordre fixe. Si $a_2' \wedge i_2$ est l'antisymétriseur déduit de a_2 en supprimant les indices communs à ceux de a_1, on a

$$(a_1 \wedge i_1)(a_2 \wedge i_2) = \begin{vmatrix} a_1 & i_1 \\ a_1 & i_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2' & i_2 \\ a_2' & i_2 \end{vmatrix} \quad (a_2 \wedge i_2)$$

On antisymétrise la ligne supérieure du déterminoide à deux mineurs du deuxième membre relativement aux indices de $(a_2 \wedge i_2)$. Mais les permutations échangeant i_2 avec un indice commun à a_1 et a_2 donnent un déterminoide équivalent à droite à zéro (Propriété III). On a donc

$$(a_1 \wedge i_1)(a_2 \wedge i_2) \overset{d}{=} \begin{vmatrix} a_1 & i_1 \\ a_1 & i_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2' & i_2 \\ a_2' & i_2 \end{vmatrix} \quad a_2$$

On peut énoncer ce résultat de deux manières :

IV a. Le produit $P = b_1 b_2$ de deux antisymétriseurs est équivalent à droite au produit $Q = b_1 \; b_1' \; b_2'$ où b_1' se déduit de b_2 en supprimant les indices égaux à ceux de b_1, et b_2' se déduit de b_2 en supprimant les indices équivalents à droite à ceux de a.

IV b. On obtient un résultat équivalent à droite au produit de deux antisymétriseurs contenant des indices équivalents à droite, en calculant le produit des antisymétriseurs par indices inférieurs fixes, les indices équivalents

.../...

étant supprimés, et rétablis dans chaque mineur du résultat final.

Exemple : $(1\wedge 3\wedge 5)\ (1\wedge 2\wedge 4)\ \begin{vmatrix}45\\45\end{vmatrix}^{+} = (1\wedge 3\wedge 5)\ (2\wedge 4)\ (1\wedge 2)\ \begin{vmatrix}45\\45\end{vmatrix}^{+}$

$$= \left(\begin{vmatrix}135\\135\end{vmatrix}\begin{vmatrix}24\\24\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}235\\135\end{vmatrix}\begin{vmatrix}14\\24\end{vmatrix}\right)\begin{vmatrix}45\\45\end{vmatrix}^{+}$$

On aurait pu (IV b) calculer $(1\wedge 3)\ (1\wedge 2) = \begin{vmatrix}13\\13\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2\\2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}23\\13\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$

et mettre dans chaque mineur un couple $\begin{matrix}5\\5\end{matrix}$ et $\begin{matrix}4\\4\end{matrix}$

PROPRIETE V. Identité de Laplace Turnbull.

Soient deux antisymétriseurs a et b sans indices communs, mais avec des indices équivalents à droite : soient a' et b' les antisymétriseurs de ces indices. Alors $a = (a' \wedge a")$, $b = (b' \wedge b")$, a" et b" étant des antisymétriseurs sans indices équivalents à droite. Soit $P = b\ (a \wedge b")$ et $Q = a\ (b \wedge a")$

On a d'après la propriété IV

$P = b(a\wedge b") = (b'\wedge b")\ (a'\wedge a"\wedge b") \overset{d}{=} ba\ (a"\wedge b")$

$Q = a(b\wedge a") = (a'\wedge a")\ (b'\wedge b"\wedge a") \overset{d}{=} ab\ (b"\wedge a")$

ab étant permutables, on en déduit $P = (-1)^{m"n"}\ Q$ si a" et b" ont respectivement m" et n" indices. On peut donc écrire en faisant m"n" changements de signe dans Q

$$(T) \qquad b\ (a'\wedge a"\wedge b") \overset{d}{=} a\ (b'\wedge a"\wedge b")$$

égalité de Laplace-Turnbull (Turnbull, p. 48).

Dans l'égalité (T) a et b sont des antisymétriseurs sans indices communs $a = (a' \wedge a")$; $b = (b' \wedge b")$ les indices de a' et b' étant deux à deux équivalents à droite.

Exemple I. $a = (1'\wedge 3\wedge 4)$ $b = (1\wedge 2)$, $a' = 1'$, $b' = 1$, $a" = 3\wedge 4$, $b" = 2$

$$(1\wedge 2)\begin{vmatrix}1'342\\1'342\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix} \overset{d}{=} (1'\wedge 3\wedge 4)\ \begin{vmatrix}1342\\1342\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}1'\\1'\end{vmatrix}$$

(Turnbull formule 33, p. 43).

.../...

Exemple II.

$$a = (1 \wedge 2) \quad b = (1' \wedge 2' \wedge 3 \wedge 4)$$

$$(1' \wedge 2' \wedge 3 \wedge 4) \begin{vmatrix} 1234 \\ 1234 \end{vmatrix} \overset{d}{=} (1 \wedge 2) \begin{vmatrix} 1'2'34 \\ 1'2'34 \end{vmatrix}$$

(Turnbull p.44 Ex.3)

L'égalité T peut servir à prouver des relations entre sommes de déterminoides déduits les uns des autres par antisymétrisation des lignes inférieures. Si en effet on partage les indices de b' en groupements disjoints dont les antisymétriseurs sont $b'_1, \ldots, b'_k$; et de même pour a', l'égalité T peut s'écrire

$$(T') \quad b\,(a' \wedge a'' \wedge b'')\; b'_1 \ldots b'_k \overset{d}{=} a\,(b' \wedge a'' \wedge b'')\; a'_1 \ldots a'_h$$

où tous les facteurs sauf b et a constituent des déterminoides.

Dans le premier membre, où l'on antisymétrise la ligne inférieure à l'aide des indices de b, tous les indices de a figurent dans le même mineur, et les indices de b sont répartis dans différents mineurs. Les rôles de a et b sont échangés dans le deuxième membre de l'équivalence à droite.

Cas particuliers.

1) Si a" ne contient aucun indice, le deuxième membre de T se réduit à ab, et on a alors $b\,(a \wedge b'') \overset{d}{=} ab$. La somme des déterminoides du deuxième membre est alors égale au déterminoide unique ab. (Turnbull, p.48, Formule II) (Ex. II précédent).

2) Si a contient deux indices équivalents à droite, le premier membre de T est nul (modulo l'équivalence à droite). Il en est donc de même du second et $a\,(b \wedge a'') \overset{d}{=} 0$, si $a \overset{d}{=} 0$

PROPRIETE VI.

Calcul du produit d'antisymétriseurs contenant des indices équivalents à droite.

Soit à effectuer le produit $(a_1 \wedge i_1) \ldots (a_k \wedge i_k)$, les a_j étant des antisymétriseurs, et les indices $i_1, \ldots, i_k$ étant équivalents à droite. Désignons par a'_p l'antisymétriseur des indices de a_p non contenus dans $a_1, \ldots, a_{p-1}$. On a par la formule de Laplace duale donnant le produit

.../...

de plusieurs antisymétriseurs, avec ligne inférieure fixe

$$P = (a_1 \wedge i_1)\ldots(a_k \wedge i_k) = \left|(a_1 \wedge i_1)\ (a'_2 \wedge i_2)\ldots(a'_k \wedge i_k)\right|\ (a_2 \wedge i_2)\ldots(a_k \wedge i_k)$$

le facteur entre barres désignant un déterminoide dont on antisymétrise la ligne supérieure par les permutations représentées par les derniers facteurs. Mais toutes les permutations s faisant intervenir les i_p donnent un résultat nul (mod. R) s'il existe un $j_p \in a_p$ tel que $sj_p = i_q$ et laissent le déterminoide D invariant (mod R) si c'est une permutation des i_p. On peut donc écrire

$$P = \left|(a_1 \wedge i_1)\ (a'_2 \wedge i_2)\ldots\ (a'_k \wedge i_k)\right|\ a_2\ldots\ a_k$$

Or $a_1 a_2 \ldots a_k = \left|a_1 a'_2 \ldots a'_k\right|\ a_2 \ldots a_k$

La propriété VI qui est une généralisation de la propriété IV peut s'énoncer de deux manières :

VI a. Le produit de plusieurs antisymétriseurs $b_1 \ldots b_k$ est équivalent à droite au produit $b_1 b'_2 \ldots b'_k\ b''_2 \ldots b''_k$ où b'_p se déduit de b_p en supprimant les indices figurant dans b_h $(\forall h < p)$ et b''_p se déduit de b_p en supprimant un indice i_p équivalent à droite à un indice i_1 de b_1.

VI b. (Extensionnels à droite) le développement de $(a_1 \wedge i_1)\ldots (a_k \wedge i_k)$ où les i_p sont équivalents à droite, sous forme de sommes de déterminoides ayant leurs indices inférieurs dans un ordre fixe se déduit du développement de $a_1 \ldots a_k$ en ajoutant au p-ième mineur de chaque déterminoide un couple d'indices $\left|\begin{matrix} i_p \\ i_p \end{matrix}\right|$.

Il en résulte que si on a deux développements de $a_1 \ldots a_k$ sous forme de sommes de déterminoides à h mineurs ayant leurs indices inférieures dans un ordre fixe, on obtient une équivalence à droite en ajoutant à chacun des h mineurs un couple d'indices $\begin{matrix} i_p \\ i_p \end{matrix}$.

.../...

Exemple. De la formule $\left|\begin{matrix}123\\123\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}12\\12\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}23\\12\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}31\\12\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right|$

On déduit si 4 et 4' sont équivalents à droite

$$\left|\begin{matrix}1234\\1234\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}4'\\4'\end{matrix}\right| \overset{d}{\equiv} \left|\begin{matrix}124\\124\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}34'\\34'\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}234\\124\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}14'\\34'\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}314\\124\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}24'\\34'\end{matrix}\right|$$

(car $(1\wedge 2\wedge 3\wedge 4)\ (1\wedge 2\wedge 4\ )\ (3\wedge 4') \overset{d}{\equiv} (1\wedge 2\wedge 3\wedge 4)\ (3)\ (4')$.)

PROPRIETE VII. dite des extensionnels.

Soit une égalité obtenue en exprimant de deux manières une somme de produits d'antisymétriseurs, entre somme de déterminoides ayant h mineurs. On obtient une nouvelle égalité en ajoutant au p-ième mineur de chaque déterminoide un couple $\begin{matrix}i_p\\i_p\end{matrix}$ et en multipliant à droite et à gauche par le symétriseur $(i_1,\ldots,i_h)^+$.

Soit à effectuer le produit $(a_1\wedge i_1)\ldots(a_h\wedge i_h)$. Les indices i_p sont ici supposés équivalents à droite et équivalents à gauche. On pourra d'après la propriété VI, soit effectuer le développement de $a_1,\ldots,a_h$ comme somme de déterminoides à h mineurs ayant leur ligne inférieure fixe èt ajouter au p-ième mineur le couple $\begin{matrix}i_p\\i_p\end{matrix}$, soit effectuer le produit en gardant les lignes supérieures fixes dans chaque déterminoide, puisque les indices i_p sont équivalents à gauche (d'après la propriété duale de la propriété VI).

C'est ainsi que si 4 et 4' sont équivalents à gauche et à droite, on peut déduire de la formule

$$\left|\begin{matrix}13\\13\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}13\\23\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}12\\12\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}32\\12\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right|$$

donnant deux expressions du produit $(1\wedge 2)\ (1\wedge 3)$, la formule

$$\left|\begin{matrix}134\\134\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}24'\\24'\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}134\\234\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}24'\\14'\end{matrix}\right| \equiv \left|\begin{matrix}124\\124\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}34'\\34'\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}324\\124\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}14'\\34'\end{matrix}\right|$$

../..

qui se déduit de deux manières de calculer

$$(4,4')^+ (1 \wedge 2 \wedge 4) (1 \wedge 3 \wedge 4') (4,4')^+$$

en utilisant la propriété VI dans le développement de droite, la propriété analogue pour la multiplication à gauche par $(4,4')^+$ dans le membre de gauche. Cette propriété, dont nous ferons un usage fréquent est appelée Propriété des extensionnels (Cf Turnbull,p. 49 Corollaire 3).

4. Représentation par des tableaux.

Soient $a_1,\ldots,a_k$ des antisymétriseurs sans éléments communs, donc permutables, l'antisymétriseur a_i ayant q_i indices, et $b_1^+,\ldots,b_{k'}^+$ des symétriseurs sans indices communs donc permutables. Soit $T = a_1 \ldots a_k b_1^+ \ldots b_{k'}^+$. Un indice quelconque figure au plus dans un a_i et dans un b_j^+. D'autre part si $T \neq 0$, au couple (a_i, b_j^+) ne peut correspondre au plus qu'un indice figurant à la fois dans a_i et b_j^+ (1, Propriété 1). On peut donc associer à tout indice figurant dans les a_i et les b_j^+ un couple $\binom{i}{j}$ et cette application est injective. Au produit T, on associera un tableau de k colonnes et k' lignes, et dans chaque case du tableau figurera un indice au plus. Le produit P^T s'obtiendra en faisant le produit des antisymétriseurs des indices figurant dans les colonnes et en multipliant ce produit N^- par le produit P^+ des symétriseurs des indices figurant dans chaque ligne.

C'est ainsi qu'au produit

$$T = (1 \wedge 2 \wedge 3) (4 \wedge 5) (6 \wedge 7) (1\ 4)^+ (26)^+ (57)^+$$

correspondra le schéma τ

1		4	
2			6
3			
	5	7	

Il est commode de représenter chaque indice par le couple d'éléments (j,i) qui lui correspond. C'est ainsi que 5 pourra être représenté par $\binom{2}{4}$, et 6 par $\binom{3}{2}$ dans le schéma précédent. Avec cette notion deux couples représentant des indices équivalents à droite auront même indice inférieur.

.../...

Le schéma τ peut aussi être considéré comme représentant le produit des antisymétriseurs $(1 \wedge 2 \wedge 3)\ (4 \wedge 5)\ (6 \wedge 7)$ où les indices $(1,4)$, $(2,5)$, $(6,7)$ sont équivalents à droite.

On peut faire la convention suivante pour représenter le produit $N^- s P^+$, où s est une permutation quelconque des m indices.

Convention.

Dans le produit $T = a_1 \ldots a_k\ b_1^+ \ldots b_{k'}^+$, on représente par le couple $\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$ l'indice (s'il existe) figurant dans a_i et b_j^+. Dans ces conditions, si s est une permutation telle que $s \begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$, le produit $T' = a_1 a_2 \ldots a_k\ \ s\ \ b_1^+ \ldots b_{k'}^+ = N^- s P^+$ sera représenté par un schéma où l'élément $\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix}$ sera placé à l'intersection de la j-ème ligne et de la i ème colonne.

C'est ainsi que si $s = \begin{pmatrix} 1342675 \\ 1234567 \end{pmatrix}$, le schéma

1 2
3 7
4
6 5

où l'on remplace les indices par les couples correspondants représente $(1 \wedge 2 \wedge 3)\ (4 \wedge 5)\ (6 \wedge 7)\ s\ (14)^+\ (26)^+\ (57)^+$

Avec la convention précédente, tout schéma renfermant dans une même colonne deux couples ayant même indice inférieur est nul (1, Propriété I, Corollaire I).

Propriétés du produit T.

Le produit $T = a_1 \ldots a_k\ b_1^+ \ldots b_{k'}^+ = N^- P^+$ peut s'écrire $T = \sum (-1)^v\ n\ p$ étendue à toutes les permutations n et p des groupes N et P liés à $a_1 \ldots a_k$ et à $b_1^+, b_{k'}^+$ (A N° 2), v étant le nombre d'inversions de n.

.../...

Remarquons d'ailleurs que N et P n'ont pas d'autre permutation commune que la permutation identique. Une permutation n laisse invariante les colonnes du schéma τ, une permutation p les lignes. La seule permutation laissant lignes et colonnes invariantes est l'identité.

Il en résulte que si $np = n'p'$ on en déduit $n'^{-1}n = p'p^{-1} = e$.

Donc $n = n'$ et $p = p'$. Les seules permutations figurant dans T sont les produits np, toutes avec un coëfficient ± 1.

D'ailleurs s étant une permutation quelconque, on a $N^- s P^+ = N^- s' P^+$ au signe près à condition que s et s' appartiennent à la même classe double de S_n suivant les deux sous groupes N et P.

5. Tableaux de Young.

Soit un produit d'antisymétriseurs sans indices communs $a_1, \ldots, a_k$. Si p_i est le nombre d'indices de a_i on peut toujours supposer $p_i \geqslant p_{i+1}$. On peut écrire les p_i indices de a_i sur la ième colonne d'un schéma de Young Ferrer. Dans ces conditions si b_j^+ désigne le symétriseur des indices figurant dans la j ième ligne du schéma, on appellera " produit de Young" le produit

$$T = a_1 \ldots a_k \, b_1^+ \ldots b_{k'}^+ .$$

tout produit d'antisymétriseurs N^- on peut ainsi faire correspondre un schéma S, et un produit de symétriseurs P^+ bien déterminé, et l'application $N^- \longleftrightarrow P^+$ est bijective.

Si les symétriseurs b_i^+ contiennent q_i indices $(q_i \geqslant q_{i+1})$ les q_i constituent une partition du nombre total d'indices. Nous dirons que le schéma S est plus élevé que le schéma S' si la première des différences $q_i - q_i'$ qui n'est pas nulle est positive.

Lemme de Von Neumann.

Si le schéma S (N^-, P^+) n'est pas plus élevé que le schéma S' (N'^-, P'^+) le produit $N^- P'^+$ est nul à moins que $P'^+ = npP^+$ (où $n \in N$ et $p \in P$).

.../...

Si q_i est le nombre d'indices figurant dans la i ème ligne de S, (q'_i dans la ième ligne de S'), on a $q_i \leqslant q'_i$. Si $q'_1 < q_1$, les indices de la première ligne de S' se répartissent dans les colonnes de S de façon qu'il y en ait au moins deux dans la même colonne, et alors $N^- P'^+ = 0$ (1, Propriété I, Corollaire 1). Par des permutations n (préservant les colonnes de S), on peut les amener à occuper les éléments de la première ligne de S, si $N^- P'^+ \neq 0$, car ils occupent alors des colonnes distinctes de S. On reprend alors le raisonnement par récurrence en supprimant la première ligne du nouveau tableau S_1 et de S'. Le seul cas où $N^- P'^+ \neq 0$ est celui où $q_i = q'_i$, $\forall$ i.

Alors par un produit de permutations conservant les colonnes de S, on aura pu amener le schéma S à ne différer du schéma S' que par l'ordre des éléments figurant dans chaque ligne. On obtiendra alors S' par un produit de permutations conservant les lignes c'est à dire par une permutation p. On a donc $N^- P'^+ = N^- np\ P^+$ (cf par exemple Weyl, p. 123, ou Van der Waerden T. II, p. I94).

La même démonstration donne immédiatement le résultat suivant :

Conséquence I.

Si S (N^-, P^+) n'est pas plus élevé que S' (N'^- , P'^+) et si s est une permutation quelconque on a $N^- s P'^+ = 0$ si $P'^+ \neq P^+$ et $s \neq np$.

Conséquence II.

Si x est un élément quelconque de l'algèbre du groupe symétrique S_m , et S étant moins élevé que S', on a $N^- x P'^+ = 0$.

En particulier, si $x = P^+ N'^-$, on a $(N^- P^+)\ (N'^-\ P'^+) = 0$

Conséquence III.

Si x est un élément quelconque de l'algèbre du groupe symétrique S_m sur Z, on a $N^- x P^+ = k\ N^- P^+$, k étant un entier rationnel.

Tout élément $x = \sum c_i s_i$, où c_i est un entier rationnel. Si s_i appartient à la classe double unité de S_m suivant N et P, c'est à dire si $s_i = n_i p_i$ ($n \in N$, $p \in P$), on a en effet si v_i est le nombre d'inversions de n_i , $N^- \pi P^+ = \sum (-1)^{v_i} c_i\ N^- P^+$, les permutations appartenant aux

.../...

autres classes doubles donnant une contribution nulle. D'où

$k = \sum (-1)^{v_i} \; c_i$.

En particulier si $x = P^+ N^-$, le produit $(N^-P^+)\,(N^-P^+) = k_1\, N^-P^+$.

On prouve (Weyl, p. I25) que $k_1 > 0$.

Remarque I.

On prouverait de même que $P^+ N'^- = 0$ si le schéma S n'est pas moins élevé que le schéma S', et si $N'^- \neq pn\, N^-$.

II. On peut écrire la conséquence II $\quad N^-s \overset{d}{\equiv} 0 \pmod{P'^+}$ et $N^-x = kN^- \pmod{P^+}$ pour la conséquence III. Nous en tirerons plus loin des applications pour des équivalence entre déterminoides.

6. Autre présentation de la théorie des antisymétriseurs.

Soit E un ensemble de n indices. Nous représenterons par la matrice trouée idempotente

$$\begin{matrix} p_1 & & p_k \\ q_1 & o \ldots o & q_k \end{matrix} \qquad (p_i \neq p_j \;\; ; \; q_i \neq q_j \; ; \qquad k = n$$

l'ensemble de toutes lespermutations transformant p_i en q_i.

L'antisymétriseur $i_1 \wedge' \ldots \wedge' i_k$ sera alors la somme alternée des permutations de E conservant l'ensemble $i_1, \ldots, i_k$, le symétriseur $|i_1, \ldots, i_k|^+$ la somme de ces permutations. Toutes les permutations considérées constituent un groupe G'_a distinct du groupe G_a du No 2. Si $\bar{a}$ est l'antisymétriseur des indices complémentaires des indices de a, on a $G'_a = G_a \cdot G_{\bar{a}}$.

Les permutations s tels que $s\, i_p = j_p$ constituent une classe à gauche du groupe symétrique S_n suivant G'_a . Nous appellerons mineur

$\begin{vmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{vmatrix}'$ la somme alternée de ces permutations (signe + si s est paire, - si s est impaire.

.../...

Avec cette interprétation, on voit aisément que les formules de Laplace, Schwein etc démontrées précédemment restent vraies. Mais de plus, on peut donner un sens à un mineur qui n'est pas nécessairement un déterminoide, et le développer par une formule de Laplace.

Exemple : $\left|\begin{matrix}12\\34\end{matrix}\right|' = \left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right|' \left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right|' - \left|\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right|' \left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right|'$.

Pour faire les démonstrations, on se ramène à la première exposition des antisymétriseurs, en exprimant les mineurs sous forme de somme de déterminoides.

Exemple. Soit à calculer $(1 \wedge' 2)\ (2 \wedge' 3) = (1 \wedge' 2) \sum \left|\begin{matrix}23\\23\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}x\\1\end{matrix}\right|$

d'où $(1 \wedge' 2)\ (2 \wedge' 3) = \sum \left|\begin{matrix}23\\2y\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}x\\1\end{matrix}\right| - \sum \left|\begin{matrix}23\\1y\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}x\\2\end{matrix}\right|$ car $(1 \wedge' 2) = \sum_y \left|\begin{matrix}12\\12\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}3\\y\end{matrix}\right|$

somme étendue à tous les indices $x \neq 2$ et 3 et $y \neq 1, 2$

De même on obtiendrait une formule de Laplace duale

$$(1 \wedge' 2)\ (2 \wedge' 3) = \sum \left|\begin{matrix}x2\\12\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}3\\y\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}x3\\12\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}2\\y\end{matrix}\right|$$

étendue aux indices x complémentaires de 2,3 et y complémentaires de 1,2. En comparant les deux résultats, on voit que les permutations transformant 2 et 3 en 2 et 1 sont les permutations où 1 et 2 proviennent de 2 et 3.

.../...

C. APPLICATIONS

1.n-Mots.

Soit un ensemble S d'éléments repérables par un indice. On considère une application de S^n dans un ensemble T appelé n-mot $(a_{i_1},\ldots,a_{i_n})$. (Ch. I, A. N° 1).

On considère le Z - module libre M_n engendré par les éléments de S^n. On peut faire opérer sur tout élément de M_n, le groupe symétrique S_n des indices $(1,\ldots n)$ et l'algèbre A_n de ce groupe symétrique, et par suite appliquer les résultats précédents relatifs aux symétriseurs et antisymétriseurs.

Exemple : $(1\wedge 2)\ (a_{i_1}, a_{i_2}) = (a_{i_1}, a_{i_2}) - (a_{i_2}, a_{i_1})$

$$\left|\begin{matrix}12\\12\end{matrix}\right|^{+} \quad (a_{i_1}, a_{i_2}) = (a_{i_1}, a_{i_2}) + (a_{i_2}, a_{i_1})$$

En général à tout sous module ou module quotient de S' algèbre A_n, correspondra bijectivement un sous module ou module quotient de M_n. Nous donnerons ici deux exemples :

Exemple I. n-Mot commutatif.

C'est la classe d'équivalence entre éléments de M_n définie par $(b,sb) \in R$, avec $b = (a_{i_1},\ldots a_{i_n})$ et s une permutation quelconque du groupe symétrique S_n. On la représente par $(a_{i_1} \circ\ldots\circ a_{i_n})$. Le Z-module des classes est isomorphe à

$$\left|\begin{matrix}1\ldots n\\1\ldots n\end{matrix}\right|^{+} \quad (a_{i_1} \circ\ldots\circ a_{i_n}) ;$$

.../...

Exemple II. n-Mot alterné.

C'est la classe d'équivalence entre éléments de M_n définie par $(b, (-1)^I sb) \in R$, I étant le nombre d'inversions de la permutation s. On représente la classe d'équivalence par $(a_{i_1} \wedge \ldots \wedge a_{i_n})$. Le Z-module quotient est ici isomorphe à l'ensemble $(1 \wedge \ldots \wedge n)$ $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$.

Si les a_i sont les éléments d'un module, ayant une base e_j l'exemple I permet de définir les polynomes suivant les e_j, l'exemple II l'algèbre extérieure suivant les e_j.

Remarque.

On peut supprimer les indices i dans a_{i_p}. Dans ce cas il peut arriver que certains des indices sur les a soient égaux. Exemple : (a_1, a_2, a_3, a_2). Dans ce cas, on pourra encore faire opérer l'algèbre du groupe symétrique A_n à la condition suivante : on considérera les indices égaux (2) comme différents. On les notera par exemple 2 et 2'. On considérera le groupe des permutations des indices (1,2,3, 2') et on multipliera à gauche le résultat par le symétriseur des indices 2 et 2', et on remplacera dans le résultat final 2' par 2.

Ainsi $\left|\begin{matrix}12\\23\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}23\\12\end{matrix}\right| (a_1, a_2, a_3, a_2) =$

$= 2\,((a_2,a_3,a_2,a_1) - (a_3,a_2,a_2,a_1) - (a_2,a_3,a_1,a_2) + (a_3,a_2,a_2,a_1))$

2. Mots à deux indices.

On peut aussi avoir un système de symboles repérés par k indices (nous prendrons ici k = 2, un indice supérieur et un indice inférieur). Dans ce cas, nous supposerons le plus souvent que l'algèbre du groupe symétrique A_n opère à gauche sur les indices inférieurs, et à droite sur les indices supérieurs :

.../...

Exemple.

$$\text{Si} \qquad P = (e_{p_1}^{q_1} \ , \ e_{p_2}^{q_2} \ , \ e_{p_3}^{q_3} \ )$$

On aura par exemple

$$(1 \wedge 2)\ P = (e_{p_1}^{q_1} \ , \ e_{p_2}^{q_2} \ , \ e_{p_3}^{q_3} \ ) - (e_{p_2}^{q_1} \ , \ e_{p_1}^{q_2} \ , \ e_{p_3}^{q_3} \ )$$

a) Si en particulier les indices inférieurs servent à nommer les éléments d'un anneau, les indices supérieurs servant à repérer leur place, la multiplication à gauche par une permutation revient à changer les noms des facteurs, et la multiplication à droite à permuter leurs places.

b) Si les e_p^q sont les éléments d'un anneau commutatif en nombre n^2 et $P = e_1^{i_1} \circ \ldots \circ e_n^{i_n}$, les déterminoides sont alors des produits de mineurs du déterminant des e_i^j formé avec des lignes et des colonnes différentes.

$(1 \wedge \ldots \wedge n)\ P$ est le déterminant des e_i^j.

De même $\left|\begin{matrix} 1 \ldots n \\ 1 \ldots n \end{matrix}\right|^{+}$ P est par définition le permanent de la matrice des e_i^j.

Avec cette interprétation deux indices équivalents à droite i et i' correspondront à une matrice dont la i ème et la i'ème colonne sont formées des mêmes éléments (même interprétation pour les lignes avec des indices équivalents à gauche).

Autre interprétation. La théorie des antisymétriseurs et symétriseurs s'applique chaque fois qu'à un élément d'un certain ensemble E on peut faire correspondre un élément de l'algèbre du groupe symétrique. Donnons encore un autre exemple. Soient n matrices $A_1, \ldots, A_n$, et associons à la permutation

$$\begin{matrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{matrix} \circ \ldots \circ \begin{matrix} p_n \\ q_n \end{matrix} \qquad \text{la somme}$$

.../...

$$S = \sum_{i_1 \neq i_2 \cdots \neq i_n} a_{i_1}^{p_1}{}_{q_1} \cdots a_{i_n}^{p_n}{}_{q_n}$$

$a_{i}^{p}{}_{q}$ désignant l'élément occupant la q ième ligne et la p ième colonne de la matrice A_i , et la somme étant étendue aux n! permutations $i_1,\ldots,i_n$ des indices $1,\ldots,n$. On voit qu'il y a application bijective des permutations de n indices sur les S. Il en résulte que toute la théorie s'applique dans ce cas, et que les propriétés des déterminants d'une matrice pour lesquels nous avons énoncé et énoncerons des théorèmes, s'appliquent également aux déterminants généralisés formés avec les éléments de n matrices, obtenus en antisymétrisant les sommes S.

C'est ainsi que pour n = 2 à la permutation $\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{matrix}$ correspondra la somme $a_1^1\, b_2^2 + b_1^1\, a_2^2$ si les matrices sont a_q^p et b_s^r et à l'antisymétriseur $(1 \wedge 2)$ correspondra l'expression

$$a_1^1\, b_2^2 + b_1^1\, a_2^2 - a_2^1\, b_1^2 - b_2^1\, a_1^2$$

Pour une étude plus complète de ces expressions, voir le chapitre (III E) ci-dessous.

Avec cette interprétation deux indices équivalents à droite i et i' correspondront à une matrice dont la ième et la i' ème colonne sont formées des mêmes éléments (même interprétation pour les lignes avec des indices équivalents à gauche).

3. Formules relatives à des produits d'éléments d'une même matrice.

Si deux indices sont équivalents à gauche et à droite, on peut les représenter par un même symbole. Cette notation ne se prête pas au calcul des permutations : pour pouvoir l'utiliser il faut donner des noms distincts aux indices égaux et multiplier à droite et à gauche par le symétriseur P^+ de ces indices. Ce procédé s'appelle la polarisation.

Soient deux ensembles d'indices $p_1,\ldots, p_m$ et $q_1,\ldots,q_m$ distincts ou non tels qu'on puisse établir une application bijective $i \leftrightarrow j$ telle que

.../...

$p_i = q_j$, et soient $p'_1, \ldots p'_m$ une permutation des indices p_i ; $q'_1, \ldots, q'_m$ une permutation des q_i. Considérons une somme $U = \sum a^{q'_1}_{p'_1} \ldots a^{q'_m}_{p'_m}$

les a^q_p étant des éléments d'une matrice sur un anneau commutatif. Donnons des noms distincts aux indices p_i qui seraient égaux. p_i prend ainsi le nom de p''_i. Au produit $a^{q_1}_{p_1} \ldots a^{q_m}_{p_m}$ on peut ainsi faire correspondre une permutation de $p''_1, \quad p''_m$. Formons le schéma d'Young correspondant aux symétriseurs des indices égaux P^+. Il lui correspond un produit d'antisymétriseurs N^- (cf B, N° 6), et à U correspond un élément de l'algèbre du groupe symétrique des indices p''_i, soit u.

D'après la conséquence III, (B n° 6), on a $N^- u P^+ = k N^- P^+$, et par suite $P^+ N^- u P^+ = k P N^- P^+$, k désignant un entier rationnel.

En remplaçant, tout calcul de permutations fait, $N^- u$ et N^- par les polynomes en a^q_p correspondants, on obtient des formules relatives à des produits d'éléments d'une même matrice.

La particularisation de la matrice a^j_i peut permettre dans certains cas de calculer le coefficient k, ce qui permettra d'obtenir une égalité dans l'algèbre du groupe symétrique S_m.

4. Antisymétriseurs composés.

De nombreuses formules classiques ayant pour objet l'étude des matrices composées (cf No 5 exemple II et III) nous amènent à définir les antisymétriseurs composés. On répartit les n indices $(1,2,\ldots p)$ en h classes disjointes contenant chacune k indices $hk = n$. Si G_i est le groupe des permutations des indices du ième groupement. Le groupe $H = G_1 \ldots G_h$ possède $k!^h$ éléments, et on considère le produit $N^- = a_1 \ldots a_h$, a_i désignant l'antisymétriseur des indices du i ème groupement. N^- est la somme alternée des permutations de H.

Désignons par $i^p_1 \ldots i^p_k$ les éléments du p ème groupement pris dans un ordre fixe et considérons les permutations de h indices p, soit s. Ces permutations, au nombre de h! échangent entre eux les groupements. Dans ces

.../...

conditions, on appelle antisymétriseur composé d'expression :

$u = \sum (-1)^I s_i \quad a_1 \dots a_h$, où I est le nombre d'inversions de s_i. L'antisymétriseur composé U contient en tout $k!^h$ h! permutations des n indices. On la représente par $U = (a_1 \barwedge \dots \barwedge a_h)$.

Exemple : $\begin{vmatrix}123\\123\end{vmatrix}\begin{vmatrix}456\\456\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}123\\456\end{vmatrix}\begin{vmatrix}456\\123\end{vmatrix} = (1 \wedge 2 \wedge 3) \barwedge (4 \wedge 5 \wedge 6)$

Si k est impair chaque permutation figurant dans u figure avec le même signe dans l'antisymétriseur des kh indices, car la transposition de deux groupements s'obtient dans u avec un changement de signe, et par k^2 changements de signe dans l'antisymétriseur des hk indices. On voit immédiatement que le signe par lequel on doit multiplier une permutation s_i figurant dans $(1 \wedge \dots \wedge n)$ pour l'obtenir dans l'antisymétriseur composé est $(-1)^{(k-1)I}$, I ayant la signification ci-dessus.

On obtient des formules sur les antisymétriseurs composés en effectuant de deux manières le produit d'antisymétriseurs.

Exemple :

$$(1\wedge 2\wedge 3)\ ((1\wedge 2) \barwedge (3 \wedge 4)\ ) = \begin{vmatrix}123\\123\end{vmatrix}\begin{vmatrix}4\\4\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}124\\123\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3\\4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}342\\123\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1\\4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}431\\123\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2\\4\end{vmatrix}$$

$$= \binom{12}{12} \barwedge \binom{34}{34} + \binom{12}{23} \barwedge \binom{34}{14} + \binom{12}{31} \barwedge \binom{34}{24}$$

Le deuxième terme valant par exemple $\begin{vmatrix}12\\23\end{vmatrix}\begin{vmatrix}34\\14\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}12\\14\end{vmatrix}\begin{vmatrix}34\\23\end{vmatrix}$

5. Exemples divers.

Exemple I.

Calculer $\begin{vmatrix}12\\12\end{vmatrix}\begin{vmatrix}23\\23\end{vmatrix}\begin{vmatrix}31\\31\end{vmatrix} = U$

ou $\begin{vmatrix}pq\\rs\end{vmatrix}$ est le mineur formé avec les lignes r, s et les colonnes p,q d'une matrice sur un anneau commutatif.

.../...

On forme le produit $u = (1 \wedge 2)\ (2' \wedge 3)\ (3' \wedge 1')$. Le schéma d'Young associé est $\begin{matrix} 1 & 1' \\ 2 & 2' \\ 3 & 3' \end{matrix}$. D'où la relation

$$(1 \wedge 2 \wedge 3)\ (1' \wedge 2' \wedge 3')\ u\ (11')^+\ (22')^+\ (33')^+ = N^-\ uP^+ = kN^-P^+$$

On obtient l'équivalence à droite

$$(1 \wedge 2 \wedge 3)\ (1' \wedge 2' \wedge 3') \left|\begin{matrix}12\\12\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}23\\2'3\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}31\\3'1\end{matrix}\right| \overset{d}{=} k\ (1 \wedge 2 \wedge 3)\ (1' \wedge 2' \wedge 3')$$

qui donne le produit de deux déterminants d'ordre 3 comme somme de produits de mineurs d'ordre 2. On voit dans cet exemple que $k = 1$.

Plus généralement, si i^p et i^q sont équivalents à droite, soit le produit $a_1, \ldots, a_{n-1}$ où $a_p = (1^p \wedge \ldots \wedge n^p)$. Le produit

$$a_1 \ldots a_{n-1}\ (1^1 \wedge 2^2 \ldots \wedge n{-}1^{n-1}) \overset{d}{=} a_1 \ldots a_{n-1}\ \text{(B,5 Propriété 6)}$$

Mais si $b_q = (1^q \wedge 2^q \ldots \wedge (q-1)^q \wedge (q+1)^q \ldots \wedge n^q)$, on a donc

$$a_1 \ldots a_{n-1}\ (b_1 \ldots b_{n-1})\ (1^1 \wedge 2^2 \ldots \wedge n{-}1^{n-1}) \overset{d}{=} a_1 \ldots a_{n-1}$$

Le premier membre peut être considéré comme une somme de déterminoides obtenus en antisymétrisant la ligne inférieure par les permutations de $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Cette formule donne le produit de n-1 déterminants d'ordre n comme somme de produits de n facteurs dont n-1 sont des mineurs d'ordre n-1 des déterminants donnés. Si on considère les indices comme équivalents à gauche aussi bien qu'à droite, on trouve la formule de Cauchy (cf ci-dessous exemple III).

Exemple II.

La méthode permet de calculer effectivement P^+uP^+ si $P^+N^-\ u\ P^+ = k'\ P^+u\ P^+$, k' entier rationnel. Dans ce cas $k'\ P^+uP^+ = k\ P^+N^-P^+$. Une spécialisation de la matrice donne k' et k.

Comme exemple. nous démontrerons le

Théorème de Sylvester-Francke.

Le déterminant formé avec tous les mineurs d'ordre k d'une

.../...

matrice carrée A d'ordre n est égal à $|A|\, C_{n-1}^{k-1}$

Il y a en tout $M = C_n^k$ combinaisons des n indices pris k à k, qu'on peut supposer être formés de k indices pris parmi(1,...,n) et rangés dans l'ordre naturel. Un même indice i figure dans un terme du développement $\frac{Mk}{n} = C_{n-1}^{k-1} = M'$ fois, si bien qu'on est conduit à considérer le groupe symétrique de M' n indices, M' à M' équivalents auxquels correspond le schéma de Young

$$S \begin{matrix} 1^1 \ldots\ldots 1^{M'} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n^1 \ldots\ldots n^{M'} \end{matrix}$$

Désignant par $a_1, \ldots, a_N$ les antisymétriseurs du groupe symétrique de M'n indices correspondant au terme de la diagonale principale du déterminant composé, on peut représenter ce déterminant par $P^+ (a_1 \bar{\wedge} \ldots \bar{\wedge} a_N) P^+$ Le signe $\bar{\wedge}$ indiquant qu'on considére les antisymétriseurs a_i disjoints comme des indices $(a_1 \bar{\wedge} \ldots \bar{\wedge} a_N) = u$ est un antisymétriseur "composé"). On a en général si N^- est le produit des antisymétriseurs du schéma S $P^+N^- u P^+ = k N^- P^+$, k entier rationnel d'après (B,6 Conséquence III). Mais en vertu de la définition de u, si s est une permutation quelconque des M'n indices $suP^+ \underline{\underline{=}} 0$ si la permutation s ne permute pas aux indices équivalents près les combinaisons d'indices figurant dans a_1 , a_N et $suP^+ \underline{\underline{=}} \pm uP^+$, si s permute ces combinaisons d'indices. Quel que soit x, de l'algèbre du groupe symétrique on a donc $P^+ x uP^+ = k_1 P^+ uP^+, k_1$ entier rationnel. En particulier si $x = N^-$, $P^+N^- u P^+ = k'P^+uP^+ = kN^-P^+$ Si on prend la matrice unité d'ordre n, P^+uP^+ est la matrice unité d'ordre M. D'où $k' = k$ et $P^+uP^+ = N^- P^+$, ce qui prouve le théorème.

Remarque.

Les démonstrations classiques de ce théorème (Tunbull, No 9 p.87; Kowalewski, p 94 sont fondées en général sur la théorie des polynômes à n^2 indéterminées, sur le Théorème de Binet Cauchy sur le produit de deux matrices, et sur le fait qu'un déterminant est un polynôme irréductible.

.../...

II. Comme cas particulier, on a le théorème de Cauchy sur le déterminant de la matrice adjointe ($k = n-1$), qui peut se démontrer en utilisant la propriété VI du B No 5.

Exemple III. Extensionnel du Théorème de Sylvester Francke.

(Kowalewski, No 48 p. 100, où il est établi dans sa généralité par des considérations de continuité).

Théorème.

Le déterminant formé avec les mineurs d'ordre m bordant un mineur B d'ordre h, d'un déterminant A d'ordre n, est donné par la formule

$$D = B^{M_1} \quad A^{M_2} \qquad \text{où } M_1 = C^{m-h}_{n-h-1} \qquad M_2 = C^{m-h-1}_{n-h-1}$$

Représentons par un même symbole les indices équivalents, à gauche et à droite, D correspondra à l'antisymétriseur composé :

$d = P^+ (a_1 \overline{\wedge} \dots \overline{\wedge} a_M) P^+$ où a_i est un antisymétriseur formé des indices fixes appartenant à D:(1,...,h)par exemple et complété par une combinaison m-h à m-h des indices restant au nombre de n-h; On a donc $M = C^{m-h}_{n-h}$. Dans le développement de d sous forme de sommes de déterminoides apparaissent les indices 12...h à la ligne supérieure et inférieure de chaque mineur. Si on les supprime, on obtient un développement de Sylvester Francke pour les n-h indices restants qui est équivalent à $\left| \begin{matrix} h+1 \dots n \\ h+1 \dots n \end{matrix} \right|^{M_2}$ d'après le théorème de Sylvester Francke. En rétablissant les $\left| \begin{matrix} 1 \dots h \\ 1 \dots h \end{matrix} \right|$ dans chacun des mineurs, on obtient $D = B^{M_1} \quad A^{M_2}$, où M_2 vaut

C^{m-h-1}_{n-h-1} et $M_1 = \quad M-M_2 = C^{m-h}_{n-h} - C^{m-h-1}_{n-h-1} = C^{m-h}_{n-h-1}$

Exemple IV. Formule de Reiss-Picquet. (Turnbull, p. 109, Encyclopédie 1, 2, 24 p. 105 et 107; cf aussi ci-dessous Chapitre III).

Soient deux matrices d'ordre n carrées A,B. Le déterminant composé hybride dont les éléments sont les déterminants obtenus en remplaçant de

.../...

toutes les manières possibles m lignes de A par m lignes de B est égal à $D = |A \mid C_{n-1}^{m} \mid \quad B \mid \quad C_{n-1}^{m-1}$

Désignant par a_i une combinaison n-m à n-m des lignes de A, et b_j une combinaison m à m des lignes de B, les combinaisons a_i étant rangées dans l'ordre lexicographique b_i complémentaire de a_i et chaque combinaison $a_i\, b_i$ ne contenant pas d'inversions, D s'écrit sous la forme

$$D = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \begin{vmatrix} 12\ldots n \\ a_1 \wedge b_1 \end{vmatrix} & \ldots\ldots\ldots & \begin{vmatrix} 12\ldots n \\ a_1 \wedge b_M \end{vmatrix} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \begin{vmatrix} 12\ldots n \\ a_M \wedge b_1 \end{vmatrix} & \ldots\ldots\ldots & \begin{vmatrix} 12\ldots n \\ a_M \wedge b_M \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

où $M = C_n^m$. Chaque indice supérieur figure ici $C_n^m = M$ fois. On est donc conduit à construire le schéma de Young

$$\begin{matrix} 1^1 & \ldots\ldots & 1^M \\ n^1 & \ldots\ldots & n^M \end{matrix}$$

à n lignes et M colonnes. Dans tout terme du développement, les indices inférieurs de B figurent m M fois, donc chaque indice $\frac{mM}{n}$ fois.

De même chaque indice de A inférieur figure $\frac{(n-m)M}{n}$ fois. Or $\frac{mM}{n} = C_{n-1}^{m-1} = N_2$

$\frac{(n-m)\,M}{n} = C_{n-1}^{m} = N_1$. Désignons par P_1^+ le produit des symétriseurs des N_1 premières colonnes du schéma, par P_2^+ le produit des symétriseurs des N_2 dernières colonnes ($N_1 + N_2 = M$). Si au schéma de Mn indices correspond l'antisymétriseur N^+ et le symétriseur P^+, considérons l'élément de l'algèbre du groupe symétrique de Mn indices u obtenu en remplaçant dans D des indices égaux supérieurs par des indices équivalents à droite, et les indices inférieurs égaux par des indices équivalents à gauche, et considérons $P_1^+ P_2^+ u P^+$. D'après la formation de D, toute permutation $s \in N^-$, c'est à dire conservant les colonnes du schéma est telle que $P_1^+ P_2^+ su P^+ = \pm P_1^+ P_2^+ u P^+$

.../...

si s transforme toute combinaison a_i en une combinaison a_j et une combinaison b_i , en une combinaison $b_{j'}$. Au contraire $P_1^+ P_2^+$ su $P^+ = 0$, si s transforme la combinaison a_i par exemple en un arrangement formé avec les indices des N_1 premières colonnes contenant deux indices équivalents à gauche c'est à dire ne correspondant pas à une combinaison a_j. On a donc

$$P_1^+ P_2^+ N^- u P^+ = k_1 P_1^+ P_2^+ u P^+ \quad (k_1 \text{ entier rationnel})$$

et comme $N^- uP^+ = k N^- P^+$, on en déduit

$$k_1 P_1^+ P_2^+ u P^+ = k P_1^+ P_2^+ N^- P^+$$

Si on prend maintenant pour A et B la matrice unité, D se réduit aux éléments de sa diagonale principale qui valent tous 1, et le deuxième membre vaut la puissance M ième du déterminant de la matrice unité qui vaut 1. Donc $k_1 = k_2$ et $P_1^+ P_2^+ u P^+ = P_1^+ P_2^+ N^- P^+$.

Remarque.

Si on prend pour B ou pour A seulement la matrice unité, on retrouve le théorème de Sylvester Francke (Exemple IV).

Exemple V.

Soit une expression uP^+, où P^+ désigne le produit des symétriseurs des indices équivalents à droite. Si N^- est l'antisymétriseur attaché au symétriseur P^+, il peut se faire que $N^- uP^+ = k_1 u P^+$, k_1 étant un entier rationnel. Ceci se produira notamment si u est de la forme $N^- v$, puisque N^- est un idempotent à un facteur numérique près. On aura alors $N^- uP^+ = k N^- P^+ = k_1 u P^+$. Une spécialisation des matrices permet d'avoir alors les coefficients k et k_1 , et on aura $kN^- \overset{d}{=} k_1 u$. En multipliant à gauche par P^+, on a aussi $k_1 P^+ uP^+ = k P^+ N^- P^+$.

Par exemple, soit à calculer l'antisymétriseur composé

$$(1 \wedge 4) \overline{\wedge} (2 \wedge 4') \overline{\wedge} (3 \wedge 4'') \overline{\wedge} (2' \wedge 3') = u$$

.../...

Le schéma S associé est

4 4' 4"
2 2'
3 3'
1

On a $N^- = (4\wedge 2\wedge 3\wedge 1)\ (4'\wedge 2'\wedge 3')\ 4''$. On voit que toute permutation appartenant au groupe N, n est telle que $P^+nu = 0$, ou $P^+nu = \pm u$.
On a donc $P^+N^-u\ P^+ = kPN^-P^+ = k_1P^+\ u\ P^+$. La matrice unité donne $k = k_1$
si bien que $u \equiv (1\wedge 2\wedge 3\wedge 4)\ (2'\wedge 3'\wedge 4')\ 4''$ (Cf Turnbull, p. 108, IV)

Remarque.

Bien entendu tous les exemples donnés (notamment Sylvester-Francke et son extensionnel) donnent des égalités entre permutations et sommes de permutations, même si certaines démonstrations ont été obtenues par le biais de matrices et de déterminants. C'est dire que le champ d'application de ces formules ne se limite pas au calcul des déterminants, mais est valable pour tout ensemble fini sur lequel on a pu définir des permutations. Il en est de même du théorème de Frobenius servant de base à la théorie des diviseurs élémentaires que nous exposons ci-dessous, avec une démonstration non classique et sous une forme légèrement généralisée (Cf pour ce Théorème Chatelet, p. 52 et Drach, Encyclopédie 1,11 No 7).

6. Le Théorème des mineurs réguliers.

Nous supposons qu'à tout élément non nul r d'un anneau R, on puisse associer un élément v (r) d'un groupe abélien additif ordonné avec les propriétés suivantes $v(rr') = v(r) + v(r')$;
$(v(r+r') \geqslant \min(v(r), v(r'))$. v(r) s'appelle alors la valuation de l'élément r de R, et l'anneau R est un anneau valué.

A tout couple d'indices $\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$ nous ferons correspondre un élément de R, a^i_j et nous représenterons le mineur d'ordre h formé avec les lignes $j_1, \ldots, j_h$ et les colonnes $i_1, \ldots, i_h$ par la notation $\begin{vmatrix} i_1 & & i_h \\ j_1 & & j_h \end{vmatrix}$, ainsi que nous l'avons fait précédemment, convenant de représenter par un même

.../...

symbole des indices équivalents à droite et à gauche. On dira qu'un mineur D' d'ordre k+1 borde un mineur D d'ordre k, si tous les indices inférieurs de D figurent parmi ceux de D', et tous les indices supérieurs de D figurent parmi ceux de D'. On appelle mineur "régulier d'ordre k" d'une matrice à n lignes et n colonnes, tout mineur d'ordre k tel que sa valuation soit inférieure ou égale à la valuation de tout autre mineur d'ordre k.

Théorème des mineurs réguliers.

Tout mineur régulier d'ordre k est bordé par un mineur régulier d'ordre k+1 et borde un mineur régulier d'ordre k-1.

La démonstration que nous donnerons est fondée sur le principe suivant. Soit D un mineur régulier d'ordre k, et D' un mineur quelconque d'ordre k+1, ne bordant pas D. Dans ces conditions, on peut trouver des mineurs D_1 , ..., D_h d'ordre k, et des mineurs D'_1 , ..., D'_h d'ordre k+1, tels que $DD' + D_1D'_1 + ... + D_h D'_h = 0$ $(D_i \neq D \; \forall \; i)$ (1.) Si on admet (1) on a $v(DD') \geq \min v(D_iD'_i)$. Donc il existe un indice i pour lequel $v(D) + v(D') \geq v(D_i) + v(D'_i)$, ou $0 \geq v(D) - v(D_i) \geq v(D'_i) - v(D')$.

d'ou $v(D'_i) \leq v(D')$. D' peut être régulier, mais il existe au moins un D'_i de valuation inférieure ou égale.

Si on suppose maintenant que D' soit régulier d'ordre k+1, et D quelconque non bordé par D', le même raisonnement montre qu'il existe un indice j, tel que $v(D_j) \leq v(D)$.

Tout revient à montrer qu'il existe une identité (1), D et D' étant deux mineurs d'ordre k et k+1 , D' ne bordant pas D, où le nombre d'indices communs à D et D'_i (et à D' et D_1) surpasse le nombre d'indices communs à D et D' (condition 2).

Nous distinguerons trois cas :

Premier cas.

Les indices supérieurs (inférieurs) de D' sont tous distincts des indices supérieurs (et inférieurs) de D.

Si $D = \begin{vmatrix} i_1 & & i_k \\ j_1 & & j_k \end{vmatrix}$ et $D' = \begin{vmatrix} i'_1 & & i'_{k+1} \\ j'_1 & & j'_{k+1} \end{vmatrix}$, les i' étant distincts de i, et les j' distincts des j. Dans ce cas on peut égaler deux

.../...

développements de Laplace du mineur

$$\Delta = \begin{vmatrix} i_1 \cdots i_k & i'_1 \cdots i'_{k+1} \\ j_1 \cdots j_k & j'_1 \cdots j'_{k+1} \end{vmatrix}$$

le premier en gardant fixe les indices supérieurs $|i_1 \cdots i_k|$ $|i'_1 \cdots i'_{k+1}|$ et en permutant les indices inférieurs; le deuxième en prenant k indices i' supérieurs fixes dans le premier mineur et les k+1 (les k indices i et un i') restant dans l'autre mineur. Le terme DD' ne figure pas deux fois, et on a bien une formule telle que (1), satisfaisant à la condition (2).

Deuxième cas.

Les mineurs D et D' ont au moins un indice supérieur (ou inférieur) commun, mais pas d'indice inférieur (ou supérieur) commun.

Alors le mineur Δ est nul, et si on suppose par exemple les j distincts des j' , le développement de Laplace de Δ obtenu en mettant dans les premiers mineurs les indices $i_1 \cdots i_k$, dans les deuxièmes mineurs les indices $i'_1 \cdots i'_{k+1}$ et en permutant les indices inférieurs fera encore figurer une fois et une seule le produit DD', et dans tous les D'_i figurera au moins un indice inférieur de D.

Troisième cas.

Si D' a en commun avec D des indices supérieurs et des indices inférieurs, ce qui arrive notamment si $2k+1 > n$, le raisonnement précédent n'est plus valable, car le terme DD' peut figurer plusieurs fois dans le développement de Δ , et donc s'évanouir. Mais si on supprime dans D et D' des couples d'indices supérieurs et inférieurs égaux, on est alors ramené au cas (1) ou au cas (2). On écrit la formule (1) relative aux mineurs $\bar{D}$ et $\bar{D}'$ obtenus après suppression des couples d'indices égaux, et on les rétablit ensuite dans chaque mineur. D'après le théorème des extensionnels, on a une identité telle que (1) entre D et D'.

Exemple. Prenons le cas de n = 5 et supposons que $D = \begin{vmatrix} 12 \\ 12 \end{vmatrix}$.

.../...

Premier cas $D' = \begin{vmatrix} 345 \\ 345 \end{vmatrix}$

On a $\begin{vmatrix} 12345 \\ 12345 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 \\ 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 345 \\ 345 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 \\ 13 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 345 \\ 452 \end{vmatrix} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \begin{vmatrix} 34 \\ 34 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 125 \\ 125 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 34 \\ 31 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 125 \\ 524 \end{vmatrix} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

et on égale les deux développements de Laplace.

Deuxième cas. Si $D' = \begin{vmatrix} 234 \\ 345 \end{vmatrix}$ qui n'a que l'indice supérieur 2

en commun avec D, on développe $\Delta = \begin{vmatrix} 12234 \\ 12345 \end{vmatrix} = 0$ par un développement k, k+1 en gardant les indices supérieurs fixes.

$0 = \begin{vmatrix} 12 \\ 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 234 \\ 345 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 \\ 13 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 234 \\ 542 \end{vmatrix} + \ldots\ldots\ldots$

Troisième cas. Si $D' = \begin{vmatrix} 234 \\ 135 \end{vmatrix}$ où l'indice inférieur 1 est commun avec $\bar{D}$ ainsi que l'indice supérieur 2, on les supprime, et on forme $\bar{D} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ $\bar{D}' = \begin{vmatrix} 34 \\ 35 \end{vmatrix}$. On est ramené au premier cas pour $\bar{D}$ et $\bar{D}'$. On forme

$$\begin{vmatrix} 134 \\ 235 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 34 \\ 35 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 34 \\ 52 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 34 \\ 23 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 41 \\ 52 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 41 \\ 23 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 41 \\ 35 \end{vmatrix}$$

On égale ces deux développements, et on ajoute à chaque mineur à la même place le couple $\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$ ce qui donne l'identité cherchée.

Conséquence 1.

Si v_k désigne la valuation d'un mineur régulier d'ordre k, on a $v_k + v_{k+2} \geq 2\, v_{k+1}$. Autrement dit les différences $v_{k+1} - v_k$ forment une suite non décroissante.

.../...

En effet si un mineur d'ordre k+1 est régulier il borde au moins un mineur d'ordre k régulier et est bordé par un mineur d'ordre k+2 régulier. On peut donc choisir D de valuation v_k et D" de valuation v_{k+2} de manière que D" ait en commun avec D k indices supérieurs et k indices inférieurs. (D" borde D).

Si par exemple $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{vmatrix}$ $\quad D'' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & k+2 \\ 1 & 2 & \dots & k & k+1 & k+2 \end{vmatrix}$

de la formule de Laplace

$$\begin{vmatrix} k+1 & k+2 \\ k+1 & k+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+1 \\ k+1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k+2 \\ k+2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} k+1 \\ k+2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k+2 \\ k+1 \end{vmatrix}$$

on déduit d'après le théorème des extensionnels en ajoutant à tous les mineurs les couples d'indices $\begin{matrix} 1, & 2 & \dots & k \\ 1 & 2, & \dots, & k \end{matrix}$

$$DD' = \begin{vmatrix} 12\dots k & k+1 \\ 12\dots k & k+1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 12\dots k & k+2 \\ 12\dots k & k+2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12\dots k & k+1 \\ 12\dots k & k+2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 12\dots k & k+2 \\ 12\dots k & k+1 \end{vmatrix}$$

(formule de Jacobi que nous rencontrerons ultérieurement, sous une forme plus générale).

La valuation du premier membre est $v_k + v_{k+2}$. Elle est égale à celle du deuxième qui est supérieure ou égale à $2\, v_{k+1}$.

Cas partiouliers.

1) Si les a_i^j appartiennent à un corps où la valuation de 0 est prise égale à l'infini, un mineur d'ordre k régulier et de valuation finie, c'est à dire non nul est bordé par au moins un mineur d'ordre k+1 régulier. Si tous les mineurs d'ordre k+1 bordant un mineur d'ordre k non nul sont nuls, on a $v_{k+1} = \infty$. C'est dire que si tous les mineurs d'ordre k+1 bordant un déterminant d'ordre k $\neq 0$ sont nuls, il en est de même de tous les mineurs d'ordre k+1. C'est le théorème définissant le rang d'une matrice dont les éléments sont dans un corps. (Fontené Rouché).

.../...

2) Si les a_i^j font partie d'un anneau principal, on peut prendre pour v le degré par rapport à un élément premier p. La valuation de D est h si D est divisible par p^h mais non par p^{h+1}. Si D_k est le pgcd de tous les mineurs d'ordre k de la matrice, le raisonnement précédent prouve que $D_k D_{k+2}$ est divisible par D_{k+1}^2.

Posons $\frac{D_k}{D_{k-1}} = d_k$. Il vient $D_k = d_1 d_2 \dots d_k$, et on tire de ce qui précéde que d_{k+1} est divisible par d_k. Les d_k sont appelés les facteurs invariants de la matrice.

Posons $e_1 = d_1 \qquad d_2 = e_1 e_2 \qquad d_i = e_1 e_2 \dots e_i$

Il vient $D_k = e_1^k \; e_2^{k-1} \dots e_k$.

Cónsidérons le produit $D_{a_1} \dots D_{a_p} = P$. En fonction des d_i, d'après la théorie des partitions $P = d_1^{b_1} \dots d_k^{b_k}$ où $b_1, \dots, b_k$ est la partition conjuguée de $a_1, \dots, a_p$, et en fonction des e_i, on a

$$P = e_1^{b_1+\dots b_k} \; e_2^{b_2+\dots+b_k} \dots\dots e_k^{b_k}$$

Le produit P s'exprime en fonction des e_i grâce au monôme partition correspondant à la partition conjuguée de $(a_1, \dots, a_p)$ (Chapitre I,D).

On a donc le résultat suivant :

PROPOSITION.

D_k désignant le PGCD des mineurs d'ordre k d'une matrice à éléments dans un anneau principal, le produit $D_{a_1} \dots D_{a_p}$ est sûrement divisible par $D_{a'_1} \dots D_{a'_p}$, si la partition $a'_1, \dots a'_p$, est divisible (au sens du Chapitre I, D) par la partition $(a_1, \dots, a_p)$.

.../...

7. Formule de Muir Kronecker Runge. (Beaver, Mac Duffee, p. I3, Encyclopédie I, 2, 24 et 26).

Soit un mineur $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \dots & k & k+1 & \dots & n \\ n+1 & \dots & & & & 2n \end{vmatrix}$ où les indices sont tous différents.

On peut développer D par une formule de Laplace (k, n-k) en laissant les indices supérieurs fixes.

$$(2) \qquad D = (n+1 \wedge n+2 \dots \wedge 2n) \begin{vmatrix} 1 & 2 \dots & k \\ n+1 & & n+k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k+1 & \dots & n \\ n+k+1 & & 2n \end{vmatrix}$$

Considérons l'expression

(3) $S = (k+1 \wedge \dots \wedge n \wedge n+1 \wedge \dots \wedge 2n)$ D . S est une somme de mineurs obtenue en antisymétrisant D pour les indices k+1 à 2n en laissant les indices (1,..., k) fixes.

En antisymétrisant les indices du développement (2) de D, on obtient

$$S = \sum \begin{vmatrix} 1 & 2 \dots & k \\ i_1 & \dots & i_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_1 & \dots & m_{n-k} \\ j_1 & \dots & j_{n-k} \end{vmatrix}$$

les i, m, j étant des combinaisons des 2 n-k indices k+1, 2n.

Si on considère seulement les termes où $i_1 \dots i_k$ sont fixes, à tout mineur de la forme $\begin{vmatrix} m_1 & \dots & m_{n-k} \\ j_1 & \dots & j_{n-k} \end{vmatrix}$ on peut associer un mineur

$\begin{vmatrix} j_1 & \dots & j_{n-k} \\ m_1 & \dots & m_{n-k} \end{vmatrix}$. Si n-k est impair, les deux mineurs figureront dans S avec un signe contraire; si n-k est pair avec le même signe. Dans le premier cas S est nul si la matrice est symétrique. Dans le deuxième cas, on voit encore que S est nul pour une matrice symétrique, en écrivant

$$D = (n+1 \wedge \dots \wedge 2n) \begin{vmatrix} 1 & 2 \dots & k & k+1 \\ n+1 & & & n+k+1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k+2 & \dots & n \\ n+k+2 & \dots & 2n \end{vmatrix}$$

et en considérant les deux mineurs qui figurent dans S ; $\begin{vmatrix} k+2 & \dots & n \\ n+k+2 & \dots & 2n \end{vmatrix}$

.../...

et $\begin{vmatrix} n+k+2 & \dots & 2n \\ k+2 & \dots & n \end{vmatrix}$ avec un signe contraire.

D'où la Formule de Muir Kronecker Runge. Si A est une matrice symétrique la somme $S = (k+1 \wedge \dots \wedge n \wedge n+1 \dots \wedge 2n) \begin{vmatrix} 1.2\dots k & k+1\dots n \\ n+1 \dots\dots\dots & 2n \end{vmatrix} = 0$ (3)

La formule (3) est la formule de Muir-Kronecker Runge.

8. Groupements d'indices équivalents à droite.

Soit n = kh indices (1,2,...,n), répartis en h classes disjointes contenant chacune k indices. On peut repérer ces indices par la notation

$$\binom{1}{1}\binom{1}{2} \dots \binom{1}{k};- \binom{h \quad h \quad \quad h}{1, \ 2, \ \dots, \ k}$$

l'indice supérieur de chaque couple indiquant la classe dans laquelle se trouve chaque indice, pris dans la suite (1,...,n).

Une permutation du groupe symétrique S_n s'écrira alors comme deux lignes de n couples d'indices. On voit immédiatement :

PROPRIETE.

La relation entre deux permutations de S_n de se déduire l'une de l'autre par des permutations des indices supérieurs de leur ligne supérieure est une relation d'équivalence R_d.

Le Z-module quotient de l'algèbre du groupe symétrique S_n sur Z par la relation d'équivalence est isomorphe à celui obtenu en multipliant à droite par le symétriseur des h indices (1,...,h).

Les h groupements d'indices sont alors dits "équivalents à droite"

Exemple. Si n = 4, désignons par 12 1'2' les quatre indices (au lieu de mettre les indices supérieurs, on a primé pour h = 2.

Les deux permutations $\begin{matrix} 121'2' \\ 1'12'2 \end{matrix}$ et $\begin{matrix} 121'2' \\ 2'21'1 \end{matrix}$ sont équivalentes

dans la relation R_d , car elles se déduisent l'une de l'autre par une permutation des indices primés avec les indices non primés.

.../...

Pfaffien généralisé.

Dans ces conditions, on appelle "pfaffien généralisé" le produit $\frac{(1 \wedge \ldots \wedge n)\ (1o\ \ldots\ oh)}{h!}$ du symétriseur des indices supérieurs 1,...,h repérant les groupements d'indices par l'antisymétriseur des indices (1,...,n) (divisé par h! car chaque permutation revient h! fois à l'équivalence R_d près.

Exemple. Pfaffien $1^a, 2^a, 1^b, 2^b$, noté Pf $(1^a,2^a,1^b,2^b)$

On peut développer $(1^a \wedge 2^a \wedge 1^b \wedge 2^b)$ par une formule de Laplace (2,2)

et par suite Pf $(1^a, 2^a, 1^b, 2^b) \equiv \begin{vmatrix} 1^a & 2^a \\ 1^a & 2^a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1^b & 2^b \\ 1^b & 2^b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1^a & 2^a \\ 1^a & 1^b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1^b & 2^b \\ 2^b & 2^a \end{vmatrix}$

$$+ \begin{vmatrix} 1^a & 2^a \\ 1^a & 2^b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1^b & 2^b \\ 2^a & 1^b \end{vmatrix}$$

D'une manière générale, la formule de Laplace s'applique évidemment aux pfaffiens. Son usage est particulièrement intéressant quand tous les mineurs qui interviennent dans le développement sont des multiples de k.

Exemple Pf $(1^a \wedge 2^a \wedge 1^b \wedge 2^b \wedge 1^c \wedge 2^c) = \frac{(1^a \wedge \ldots \wedge 2^c)\ (aoboc)}{3!}$

$\equiv (1^a \ldots \wedge 2^c) \begin{vmatrix} 1^a & 2^b \\ 1^a & 2^a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1^b\ 2^b & 1^c\ 2^c \\ 1^b\ 2^b & 1^c\ 2^c \end{vmatrix}$ (on antisymétrise la ligne inférieure du déterminoide) (Cf KOWALEWSKI, p. I29) : c'est le développement d'un pfaffien sous forme de somme de produits de pfaffiens.

Remarque.

L'usage des groupements d'indices équivalents est utilisé également dans la théorie des invariants de Aronhold (cf par exemple TURNBULL, p. I9I).

.../...

On réserve généralement le nom de "pfaffien" au cas où k = 2.

Le pfaffien $(1 \wedge 2 \ldots \wedge 2h) = p$ peut s'écrire sous la forme

$$p = \sum \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ i_1 & i_2 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} 2q-1 & 2q \\ i_{2q-1} & i_{2q} \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} 2h-1 & 2h \\ i_{2h-1} & i_{2h} \end{vmatrix}$$

sous forme d'une somme de déterminoides, les i_p désignant une permutation paire des indices (1,...,2h) et deux permutations n'étant considérées comme pas distinctes quand on permute les indices inférieurs de deux mineurs. Les permutations équivalentes à la permutation identique constituent un groupe de 2^h h! éléments, qu'on appellera groupe lié au pfaffien G (p) et le pfaffien peut être considéré comme la somme des classes à gauche de l'antisymétriseur des 2h indices relativement à G_p. Le nombre des termes du développement du pfaffien est donc $\frac{2h!}{2^h\, h!} = 1.3 \ldots (2h-1)$. Par exemple pour h = 2 $(1 \bar{\wedge} 2 \bar{\wedge} 3 \bar{\wedge} 4)$ aura pour groupe attaché le groupe formé des 8 permutations I234, 34I2, 2I34, 2I43, 43I2, 34I2, 432I et $\begin{vmatrix} 12 \\ 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 34 \\ 34 \end{vmatrix}$ désignera la somme de ces 8 permutations.

Tous les théorèmes valables pour les antisymétriseurs valent pour les pfaffiens à condition de ne considérer que des mineurs contenant un nombre pair d'indices.

Exemple I.

Formule de Laplace, où on ne gardera qu'une fois les termes se déduisant les uns des autres par permutations des indices inférieurs des différents mineurs. La formule des extensionnels reste valable.

De $(1 \bar{\wedge} 2 \bar{\wedge} 3 \bar{\wedge} 4) = \begin{vmatrix} 12 \\ 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 34 \\ 34 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 \\ 13 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 34 \\ 42 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 \\ 14 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 34 \\ 23 \end{vmatrix}$, on déduit par exemple $(1 \bar{\wedge} 2 \bar{\wedge} 3 \bar{\wedge} 4 \bar{\wedge} 5 \bar{\wedge} 6)\ (5' \bar{\wedge} 6') = \begin{vmatrix} 1256 \\ 1256 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 345'6' \\ 345'6' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1256 \\ 1356 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 345'6' \\ 425'6' \end{vmatrix}$

si 5,6 et 5',6' sont équivalents à gauche.

Exemple II.

Le théorème des mineurs réguliers est valable pour les pfaffiens. Si un mineur est régulier d'ordre 2k, il est en effet bordé par un mineur

.../...

régulier d'ordre 2 k+2 (puisque bordé par un mineur régulier d'ordre 2k+1 et que la relation "bordé" est transitive).

Si les mineurs sont des éléments d'un anneau valué, de la relation $v_k + v_{k+2} \geq 2\, v_{k+1}$ (6 Conséquence 1), on tire

$$v_{2p} + v_{2p+2} \geq 2\, v_{2p+1} \quad , \quad v_{2p+2} + v_{2p+4} \geq 2\, v_{2p+3}$$

d'où $v_{2p} + v_{2p+4} + 2\, v_{2p+2} \geq 2\,(v_{2p+1} + v_{2p+3} \geq 4\, v_{2p+2}$

et par suite $v_{2p} + v_{2p+4} \geq 2\, v_{2p+2}$

Il en résulte que si les mineurs d'ordre 2 sont des éléments d'un anneau commutatif (ce qui arrive quand on a des éléments a_{ij}, tels que $a_{ii} = 0$, et $a_{ij} = -a_{ji}$), si l'anneau est principal et que D_p désigne le PGCD des mineurs d'ordre 2p du pfaffien, $D_p D_{p+2}$ divise D_{p+1}^2; A cette question se rattache le théorème de Cahen sur la forme canonique des matrices symétriques gauches par congruence (Cf par exemple Mac Duffee, p. 52; Papy, Colloque Algébre et théorie des nombres Paris I949).

CHAPITRE III

PRODUIT SYMETRISE.

A. Généralités.

1. n-mots. Soit un système quelconque de symboles, et soit M l'ensemble des mots qu'on peut former avec ces symboles. L'ensemble M a une structure de demi groupe, si on désigne par ab le mot formé par la juxtaposition des mots a et b. Dans tout ce chapitre nous considérerons des n-mots, c'est à dire des applications d'éléments de la forme $(a_1,\ldots,a_n) \in M^n$ dans un ensemble N.

Si on se donne un anneau R, on peut construire un R-module ayant les n mots pour vecteurs de base, et une algèbre associative S_n sur ce R module dès l'instant qu'on définit sur les n mots une multiplication associative.

La donnée de cette multiplication associative n'est pas unique : par exemple, la construction du corps quadratique par la formule

$$(a,a')\ (b,b') = (aa'+m\,bb'\ ,\ ab' + ba').$$

D'autre part, nous introduirons entre n-mots une relation d'équivalence T, compatible avec l'addition et la multiplication dans S_n , ce qui permet de définir une algèbre quotient homomorphe à S_n , S_n/T. Par exemple

$$(a_1,\ldots,a_i+a_i'\ldots,a_{i+1},\ldots a_n) = (a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n) + (a_1,\ldots a_{i-1}',a_i',a_{i+1},\ldots a_n$$

qui exprime la distributivité de , par rapport à + à la i ème place, ou encore $(a_1,a_2) + (b_1,b_2) = (a_1+b_1,\ a_2+b_2)$.

2. Produit symétrisé relativement à un groupe de permutations G.

Soient trois n-mots $A = (a_1,\ldots,a_n)$, $B = (b_1,\ldots,b_n)$, $C= (c_1,\ldots c_n$

.../..

et recherchons s'il existe des produits associatifs du type

$$AB = \sum k_s \, (a_{s1}\, b_1 \, , \, a_{s2}\, b_2, \ldots, \, a_{sn}\, b_n)$$

où $k_s \in R$, supposé unitaire et d'intégrité, et s une permutation quelconque des indices $(1,\ldots,n)$, sp étant l'indice sur lequel s applique p.

Il vient immédiatement

$$(AB)\, C = \sum k_s k_{s'} \, (a_{ss'1} b_{s'1} \, c_1, \ldots, a_{ss'p} b_{s'p} c_p, \ldots, a_{ss'n} b_{s'n} c_n)$$

et

$$A \, (BC) = \sum k_s k_{s'} \, (a_{s1} b_{s'1} \, c_1, \ldots, \, a_{sp} b_{s'p} c_p, \ldots, \, a_{sn} \, bs'n \, c_n).$$

En comparant l'associativité exigue $k_{ss'} k_{s'} = k_s k_{s'}$, $\forall$ s et s'.

Si $k_{s'} \neq 0$, on a $k_{ss'} = k_s$, et si $k_e \neq 0$, en faisant $s = e$ $k_{s'} = k_e$.

Toutes les permutations s pour lesquelles $k_s = k_e \neq 0$ forment un groupe si leur ensemble n'est pas vide car $k_s = k_{s'} = k_e$ entraîne $k_{ss'} = k_e$ et les s forment une partie stable d'un groupe fini, donc un sous groupe. D'ailleurs si $k_e = 0$, on a :

$k_{es} k_{s'} = k_e k_{s'} = 0$. D'où $k_{s'} = 0$, $\forall$ s'. D'où la

PROPOSITION.

Les seuls produits associatifs de n mots de la forme

$$(1) \quad (a_1,\ldots,a_n)\,(b_1,\ldots,b_n) = k_s \, (a_{s1} b_1, \ldots, a_{sp} b_p, \ldots, a_{sn} b_n)$$

sont ceux où $k_s = 0$ pour toutes les permutations sauf celles appartenant à un groupe G. Pour $s \in G$, on peut prendre $k_s = 1$ (si on pose $k_e = 1$)

Définition.

On appelle produit symétrisé relativement au groupe G des n mots $(a_1,\ldots,a_n)$ et $(b_1,\ldots,b_n)$ et on pose $(a_1,\ldots,a_n)(b_1,\ldots,b_n) = \sum (a_{s1} b_1, \ldots, a_{sn} b_n)$

où la somme est étendue à toutes les permutations d'un groupe de permutations G.

.../...

Quand nous ne spécifierons pas le groupe, nous prendrons comme groupe G le groupe symétrique des n! permutations.

Exemple n = 2 Si G = e $(a_1,a_2)\,(b_1,b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$

$G = S_2 \quad (a_1,a_2)\,(b_1,b_2) = (a_1b_1, a_2b_2) + (a_2b_1, a_1b_2)$.

Remarque I.

On peut parler de quasi distributivité du produit symétrisé par rapport aux signes (+) et (,) en ce sens que si on remplace (') par (+) on obtient la formule usuelle de $(a_1+a_2)\,(b_1+b_2)$.

II. On peut disposer le mot a_ib_j à l'intersection de la ième ligne et de la j ième colonne d'un tableau carré (n,n). Le produit symétrisé s'obtient alors comme le "permanent" de la matrice obtenue (Ch.II C,2b), le signe du produit étant remplacé par (,) et l'ordre des colonnes étant fixe (1,...,n).

3. Liaison avec la théorie des permutations.

Soit un terme quelconque du développement du produit symétrisé ABCD ... ou $A = (a_1,\ldots,a_n)$ $B = (b_1,\ldots, b_n)$ etc. Ce terme s'écrit

$T = (a_{i_1} b_{j_1} c_{k_1}, \ldots, a_{i_n} b_{j_n} c_{k_n})$ où $(i_1,\ldots,i_n)$, $(j_1,\ldots,j_n)$, $(k_1,\ldots,k_n)$

sont des permutations des n indices 1,...,n. On peut donc, l'ordre des lettres (a,b,c) étant fixé, réaliser une application bijective de T sur les tableaux S (T)

$$S(T) = \begin{matrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ i_n & j_n & k_n \end{matrix}$$

Les indices situés sur une même colonne de S (T) sont des permutations $s_1,\ldots,s_k$ des indices 1,...,n. Les indices situés sur la p-ième ligne

.../...

indiquent les indices des a,b,c etc qui sont situés dans le p-ème mot du n-mot. La donnée de T détermine S (T) et par suite $(s_1,\ldots,s_k)$, et l'application de T sur les k-uples ordonnés de permutations de n-indices est bijective.

C'est ainsi qu'à $T = (a_1b_2c_3,\ a_2b_1c_2,\ a_3b_3c_1)$ correspondra le

tableau
$$\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{matrix}$$
et le triplet de permutations (I23,2I3,32I).

On peut se proposer de rechercher à quoi correspond le produit symétrisé pour les k-uples de permutations. On peut pour cela opérer de la manière suivante.

Soit une algébre A (l'algèbre du groupe symétrique S_n), associative sur un anneau d'intégrité Z. On considére les k-uples d'éléments de A, $(u_1,\ldots,u_k)$ $u_i \in A$, sur lesquels on établit la relation d'équivalence de la multilinéarité :

$$(u_1,\ldots,u_i+u_i'\ldots\ u_k) = (u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_k) + (u_1,\ldots,u_i',\ldots,u_k)$$

$$(u_1,\ldots,au_i,\ldots,u_k) = a\,(u_1,\ldots,u_k) \quad \text{avec } a \in Z$$

et on considère le module M sur Z engendré par les $(s_{i_1},\ldots,s_{i_k})$ les s_{i_p} étant certains des N vecteurs de base de A, et ceci pour tout entier k. On transformera le module M en algébre associative sur Z si on définit sur les vecteurs de base de M une multiplication associative.

On peut choisir un élément $u \in A$. Soit $u = \sum_{1,N} k\,(s_i)\,s_i$ où

$k\,(s_i) \in Z$, et soit E, E', E" des vecteurs de base de M.

$$E = (s_{i_1},\ldots,s_{i_p}),\ E' = (s_{i'_1},\ldots,s_{i'_{p'}}),\ E'' = (s_{i''_1},\ldots,s_{i''_{p''}})$$

et on définira le produit E x E' par la relation

$$(1)\quad E \times E' = \sum k\,(s_i)\,(s_{i_1}s_i,\ldots,s_{i_p}s_i, s_{i'_1},\ldots s_{i'_p})$$

.../...

Il en résulte

$$(2)\quad (E\times E')\times E'' = k(s_i)k(s_j)(s_{i_1}s_i s_j,\dots,s_{i_p}s_i s_j, s_{i'_1}s_j,\dots,s_{i'_p}s_j, s_{i''_1},\dots,s_{i''_{p''}})$$

$$\text{et}\quad (3)\quad E\times(E'\times E'') = \Sigma k(s_i)k(s_j)(s_{i_1}s_i,\dots,s_{i_p}s_i, s_{i'_1}s_j,\dots,s_{i'_p}s_j, s_{i''_1},\dots s_{i''_{p''}})$$

En égalant (2) et (3), on voit que le produit ExE' sera associatif si $k(s_i s_j)\, k(s_j) = k(s_i)\, k(s_j)$, ce qui ramène à la proposition du No 2.

PROPOSITION.

Le produit ExE' défini par (2) sera associatif si l'élément u est la somme des permutations d'un groupe G.

La formule (1) devient alors $E \times E' = \Sigma s_{i_1}s_i,\dots,s_{i_p}s_i, s_{i'_1},\dots s_{i'_{p'}}$

somme étendue à toutes les permutations s_i d'un groupe G.

On retrouve ainsi le produit symétrisé uniquement à l'aide de n-uples de permutations.

Exemple. Soit n=2, effectuer le produit symétrisé $(a_2,a_1)(b_1,b_2)(c_2,c_1)$

par rapport au groupe symétrique S_2. On pose $s_1 = \begin{smallmatrix}12\\12\end{smallmatrix} = e$ $s_2 = \begin{smallmatrix}12\\21\end{smallmatrix}$.

On effectue le produit $s_2 \times s_1 \times s_2$.

$s_2 \times s_1 = (s_2 s_1, s_1)$; $(s_2 \times s_1)\times s_2 = ((s_2 s_1)s_1, s_1 s_1, s_2) + ((s_2 s_1)s_2, s_1 s_2, s_2) =$

$= (s_2,s_1,s_2) + (s_1,s_1,s_2) + (s_1,s_2,s_2) + (s_2, s_1, s_2)$

dont les schémas correspondent à la somme des deux mots

$(a_2b_1c_2, a_1b_2c_1) + (a_1b_1c_2, a_2b_2c_1) + (a_1b_2c_2, a_2b_1c_1) + (a_2b_1c_2, a_1b_2c_1)$

qu'on aurait obtenu en effectuant directement le produit symétrisé

$(a_2,a_1)\,(b_1,b_2)\,(c_2,c_1)$.

.../...

Remarque.

D'une manière générale, si G^+ désigne la somme des permutations du groupe G par rapport auquel on symétrise, si e est la permutation identique, on a $(e \times e \ldots \times e) = (G^+, G^+, \ldots, G^+, e)$ où G^+ figure k-1 fois dans le deuxième membre si e figure k fois dans le premier.

4. Relations d'équivalence entre n-mots.

Etant donné des n-mots, on peut se proposer d'établir des relations d'équivalence entre n-mots obtenus en effectuant des permutations sur les places de $(u_1, \ldots, u_n)$. Effectuer la permutation s $p = i_p$ sur ces places, revient à effectuer la permutation s sur les lignes du schéma S, donc à considérer le k uple de permutations $(s_1 s, s_2 s, \ldots, s_k s)$ si à $(u_1, \ldots, u_n)$ correspond le k-uple $(s_1, \ldots, s_k)$.

PROPRIETE I

La relation $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ R $(t_1, \ldots t_k)$
si et seulement s'il existe s permutation d'un groupe H telle que $t_i = s s_i$ est une relation d'équivalence. R est compatible avec le produit symétrisé relativement à G si H est un sous groupe de G.

a) Si $s = e \in H$, on voit que R est réflexive; En faisant $s \to s^{-1}$ on voit que R est symétrique. Supposons $(s_1, \ldots, s_k)$ R $(s'_1, \ldots, s'_k)$ et $s'_1, \ldots, s'_k$ R $(s''_1, \ldots, s''_k)$. Donc il existe s et $s' \in H$ tels que $s_p = s'_p s$. $s'_p = s''_p s'$

d'où $s_p = s''_p (ss')$ et $ss' \in H$.

b) Formons $(s_1, \ldots, s_k) \times (t_1, \ldots, t_{k'})$ où les s_i et les t_j sont des permutations. Si $G = \sum g_i$ est le groupe par rapport auquel on forme le produit symétrisé $(s_1 s, \ldots, s_k s) \times (t_1, \ldots, t_{k'}) = \sum_i (s_1 s_{g_i}, \quad s_j s_{g_i}, t_1, \ldots, t_{k'})$

$= (s_1, \ldots, s_k) \times (t_1, \ldots, t_{k'})$ si $s \in G$

D'ailleurs $(s_1, \ldots, s_k) \times (t_1 s, \ldots, t_{k'} s) = \sum_i (s_1 g_i, \ldots, s_k g_i, t_1 s, \ldots, t_{k'} s)$

.../...

En multipliant à droite par $s^{-1} \in H$, toutes les permutations figurant au deuxième membre, on obtient $(s_1,\ldots,s_k)\ (t_1,\ldots,t_k,)$.

On peut donc définir si $H \subseteq G$ un produit symétrisé sur l'ensemble des classes d'équivalence. On peut aussi considérer la somme des permutations H^+ de toutes lespermutations de H et considérer $(s_1H^+,\ldots,s_kH^+)$.

L'algèbre quotient M/R est isomorphe à l'algèbre des $(s_1H^+,\ldots,s_kH^+)$

Cas particulier.

Si H = G est le groupe symétrique S_n , une permutation quelconque des mots d'un n mot donne un n-mot équivalent. On appelle n-mot commutatif la classe d'équivalence, et on représentera la classe de $(u_1,\ldots,u_n)$ par $(u_1 o \ldots o\ u_n)$. L'algèbre des classes $(u_1 o \ldots o\ u_n)$ est isomorphe à celle des $\sum (u_{i_1},\ldots,u_{i_n})$ étendue aux n! permutations $(i_1,\ldots,i_n)$ des indices $1,\ldots,n$.

PROPRIETE II.

La relation entre k-uples de permutations

$$(s_1,\ldots,s_k)\ R\ (-1)^I\ (t_1,\ldots,t_k)$$

s'il existe s ayant un nombre I d'inversions tel que $t_i = s_i s$, s appartenant à un groupe H, est une relation d'équivalence.

Cette relation n'est pas en général compatible avec le produit symétrisé.

Si G est le groupe symétrique S_n et $H = G = S_n$, les classes d'équivalence recevront le nom de n-mots alternés. On représentera la classe d'équivalence de $(u_1,\ldots,u_n)$ par $(u_1 \wedge \ldots \wedge u_n)$, et ce n mot alterné pourra être considéré comme $(1 \wedge 2 \ldots \wedge n)\ (u_1,u_2,\ldots,u_n)$.

Pour les propriétés des n-mots alternés, voir plus bas N° C

.../...

5. Formule de Newton - Cayley - Hamilton.

Nous supposerons dans ce paragraphe qu'il existe un mot I tel que uI = Iu = u quel que soit le mot u. On a dans ces conditions la formule, dite de Newton Cayley-Hamilton, vraie quels que soient les mots $u_1,\dots,u_n,x_1,\dots,x_{n-1}$.

Considérons le produit symétrisé $(u_1,\dots,u_n)\ (v,x_1,\dots,x_{n-1}) = P$ et formons $TP = \sum_i\ (u_1,\dots,u_{i-1},I,u_{i+1},\dots,u_n)\ (u_iv,\ x_1,\dots,x_{n-1})$.

L'opérateur T sur un produit symétrisé P revient à remplacer P par une somme de n produits symétrisés, le ième étant obtenu en remplaçant dans le premier facteur le ième mot par I, et multipliant à gauche le premier mot du deuxième facteur par u_i.

Dans ces conditions la formule de Newton Cayley Hamilton s'écrit

$$P - TP + T^2P + \dots(-1)^p\ T^p\ P + \dots + (-1)^n\ T^n\ P = 0 \qquad \text{(NCH)}$$

Pour la démonstration, on vérifie que les termes des développements des produits symétrisés s'annulent deux à deux : on a en effet

$$T^p\ P = \sum (u_1,\ u_{i_1}\ ,\ u_n)\ i_1\dots i_p\ (u_{i_1}\dots u_{i_p}\ v,\ x_1\dots x_{n-1})$$

la somme étant étendue à tous les arrangements $i_1,\dots,i_p$ des indices $1,\dots,n$ et en désignant par $(u_1,u_{i_1},\dots,u_n)\ i_1,\dots,i_p$ le n mot $(u_1,\dots,u_n)$ où on a remplacé $u_{i_1},\dots,u_{i_p}$ par I.

En effectuant par la règle du produit symétrisé, il vient

$$T^p\ P = \sum (u_{i_{p+1}}\ u_{i_1}\dots u_{i_p}\ v, u_{i_{p+2}}\ x_1,\dots,u_{i_n}\ x_{n-p-1}, x_{n-p},\dots,x_{n-1})$$

$$+\ \sum (u_{i_1}\ u_{i_2}\dots u_{i_p}\ v,\ u_{i_{p+1}}\ x_1,\dots,u_{i_n}\ x_{n-p},\ x_{n-p+1},\dots x_{n-1})$$

La première sommation étendue à tous les arrangements $i_1,\dots,i_{p+1}$ des indices mis dans le premier mot et aux combinaisons en nombre C_{n-1}^{n-p-1} des u_i

.../...

non employés qu'on répartit à raison de u_n dans chacun des n-1 derniers mots figure dans le développement de $T^{p+1}P$. La deuxième sommation analogue figure dans celui de $T^{p-1}P$.

Exemple. $n = 2$

$$(u_1,u_2)(v,x) = P \quad . \quad TP = (I,u_2)\,(u_1v,x) + (u_1,I)\,(u_2v,x)$$

$$T^2 P = (I,I)\,(u_2u_1v,x) + (I,I)\,(u_1u_2v,\ x)$$

Remarque.

La formule de Newton Cayley Hamilton, dont nous verrons qu'elle contient comme cas particuliers les formules de Newton pour les fonctions symétriques en un système d'indéterminées (II,B, No 2) et de Cayley Hamilton pour les matrices (III,E) se rattache par son premier membre à d'autres formules. Soit f une application d'un treillis distributif dans un groupe abélien additif. On a fréquemment la formule

$f(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p f(A_{i_1} \wedge \ldots \wedge A_{i_p})$ où la sommation est étendue à toutes les combinaisons $i_1,\ldots,i_p$ des indices $1,\ldots,n$, quel que soit p. Une telle formule intervient en logique, dans la formule des probabilités totales, et dans les fonctions de Mobius et d'Euler ainsi que dans la théorie de la dimension.

Une formule de type analogue intervient également dans la dérivation extérieure. (III D N° 6 ci-dessous).

.../...

B. PRODUIT SYMETRISE DE N-MOTS COMMUTATIFS.

Rappelons (A, 4, Pté I) qu'on appelle n-mot commutatif et qu'on désigne par $(u_1 o \ldots o u_n)$ la classe d'équivalence définie par $(u_1,\ldots,u_n)$ R $(u_{i_1},\ldots,u_{i_n})$. Le calcul sur ces classes est isomorphe au calcul fait sur $\sum (u_{i_1},\ldots,u_{i_n})$, $(i_1,\ldots,i_n)$ étant n'importe quelle permutation des indices $1,\ldots,n$.

1. Calcul du produit symétrisé dans le cas où certains des mots des n-mots commutatifs sont égaux. n-mot commutatif réduit.

Dans un n-mot commutatif, nous emploierons la notation abrégée a^{ok} pour désigner l'expression : $(a_1 o \ldots o a_k)$ si $a_i \neq a$, $\forall_i$

Soient les deux n-mots commutatifs $A = (a_1{}^{ok_1} o \ldots o a_n{}^{ok_n})$ et $B = (b_1{}^{ok'_1} o \ldots o b_n{}^{ok'_n})$, les k_i et k'_j étant des entiers positifs ou nuls satisfaisant à la condition $\sum k_i = \sum k'_i = n$.

Un terme quelconque du développement du produit symétrisé AB (il y en a en tout n!) se présente sous la forme

$$R_H = (a_1 b_1)^{oh_{11}} o \ldots o (a_i b_j)^{oh_{ij}} o \ldots o (a_n b_n)^{oh_{nn}}$$

où les h_{ij} sont des entiers positifs ou nuls en nombre de n^2, qu'oh peut disposer suivant un tableau carré d'ordre n : $(h_{ij}) = h$. La somme des éléments de la i ème ligne de H est égale à k_i, de la j-ième colonne à k'_j.

A toute matrice telle que H correspondra un terme R_H.

PROPOSITION.

Le coefficient de R_H dans le développement du produit symétrisé AB est $K_H = \dfrac{\pi^{k_i}! \ \pi^{k'_j}!}{\pi (h_{ij})!}$

.../...

Comptons de combien de manières on peut répartir les k_1 mots a_1 en n groupements contenant chacun $h_{1\,i}$ mots a_1. On a $C_{k_1}^{h_{11}}$ pour le premier groupement, $C_{k_1 - h_{11}}^{h_{12}}$ pour le deuxième, au total

$$C_{k_1}^{h_{11}} \; C_{k_1-h_{11}}^{h_{12}} \; C_{k_1-h_{11}-h_{12}}^{h_{13}} \cdots C_{h_{1n}}^{h_{1n}} = \frac{(k_1)!}{\pi_i (h_{1i})!}$$

manières de disposer a_1 pour obtenir R_H. On raisonne ensuite de même sur $a_2, \ldots a_n$, $b_1, \ldots, b_n$.

n-mot commutatif réduit.

Soit le n-mot commutatif $A = (a_1^{ok_1} o \ldots o a_n^{ok_n})$.

On appelle n-mot réduit le n mot $|A| = \frac{A}{k_1 ! \ldots k_n !}$

Calculons le produit symétrisé $|a| \; |b|$. On a $AB = \sum K_H R_H$.

d'où $\pi k_i ! \; \pi k_j ! \; |A| \; |B| = \sum K_H \; (\pi h_{ij} !) \; |R_H|$

et en tenant compte de la valeur de K_H

$$|A| \; |B| = \sum R_H.$$

PROPOSITION II

Tous les coefficients dansle développement du produit symétrisé de deux mots commutatifs réduits sont égaux à 1.

Remarques 1.

Ce résultat suppose essentiellement que les $a_i b_j$ sont tous distincts; 2 L'emploi des n-mots réduits, supprimant les factorielles peut avoir une signification quelle que soit la caractéristique de l'anneau Z. (voir à ce sujet CARTIER : Puissances divisées, et PAPY : Puissances réduites).

.../...

2. n-mots commutatifs avec des mots permutables.

Nous supposerons ici que les mots $u_1,\dots,u_n$ sont permutables c'est à dire que $u_iu_j = u_ju_i$ au sens du produit dans le demi groupe des mots. De plus, nous supposons qu'il existe un mot I, tel que $Ix = xI$ quel que soit le mot x.

Dans ces conditions la formule NCH(C III, A N° 5)prend la forme suivante :

Formule de Newton Cayley Hamilton.

$u_1,\dots,u_n$ étant des mots permutables et $x_1,\dots,x_{n-1}$ des mots quelconques, on a la formule

$$(Iox_1 o\dots o x_{n-1})(u_1 o\dots o u_n) - \sum(u_1 ox_1 o\dots o x_{n-1})(I ou_2 o\dots o u_n)+\dots$$

$$+ (-1)^p \sum(u_1u_2\dots u_p ox_1 o\dots ox_{n-1})(I^{op} o u_{p+1} o\dots o u_n) + \dots$$

$$+ (-1)^n (u_1u_2\dots u_n o x_1 o\dots ox_{n-1})(I^{on}) = 0 \quad (\text{NCHC})$$

Cas Particuliers.

a) Si on fait $u_1 = \dots = u_n = u$, la formule prend le nom de formule de Cayley Hamilton

$$\sum_1^n (-1)^p C_n^p (u^p ox_1\dots ox_{n-1})(u^{o\ n-p} o I^{op}) = 0 \qquad (CH)$$

Si on fait $x_1 = \dots = x_{n-1} = I$ et si l'on pose $S_p = \left| u^p o I^{on-p} \right|$ et $s_p = \left| u^{on-p} o I^{op} \right|$; les factorielles disparaissent avec les n-mots réduits et il reste

$$(N) \quad \sum_1^n (-1)^p S_p s_{n-p} = 0 , \quad \forall n, \text{ formule de Newton.}$$

Exemple. Pour n = 2, la formule (NCH) se réduit à

$$(Iox)(u_1ou_2) - (u_1 ox)(Iou_2) - (u_2ox)(I ou_I) + (u_1u_2ox)(IoI) = 0$$

ou en développant

$$(u_1 oxu_2)+(xu_1ou_2)-(u_1oxu_2)-(xou_1u_2)-(u_2oxu_1)-(xou_2u_1)+2(u_1u_2 o x)$$

.../..

3. n mot monogène commutatif.

On appelle n-mot monogène tout n mot de la forme $(u^{k_1},\ldots,u^{k_n})$, k_i étant un entier positif ou nul, et où u^{ki} désigne le produit de k_i mots égaux à u (au sens du produit des mots).

Nous considérerons dans ce paragraphe les n-mots monogènes commutatifs de la forme $(u^{k_1} o\ldots o u^{k_n})$, où on peut toujours supposer $k_i \geqslant k_{i+1}$. A tout n mot monogène commutatif, on peut associer de façon bijective une partition de $k_1+\ldots+k_n = P$, si u est donné.

Faisons le produit symétrisé de A et A', n-mots commutatifs monogènes

$$A = (u^{k_1} o\ldots o u^{k_n}) \quad , \quad A' = (u^{k'_1} o\ldots o u^{k'_n}).$$

$$AA' = \sum (u^{k_{i_1} + k'_1} o\ldots o\, u^{k_{i_n} + k'_n})$$

somme étendue aux n! permutations $i_1,\ldots,i_n$ des indices $1,\ldots,n$.

On a évidemment ici $AA' = A'A$. Tous les termes du produit correspondront à des partitions du nombre $\sum k_i + \sum k'_i$. On appellera sommet de AA' le n-mot $(u^{k_1+k'_1} o\ldots o u^{k_n+k'_n})$, si $k_i \geqslant k_{i+1}$; $k'_i \geqslant k'_{i+1}$

le sommet est ainsi le terme de plus grande hauteur dans le développement de AA'.

PROPOSITION.

Tous les termes du produit AA' correspondent à des partitions multiples (au sens donné CH I, D,2) de la partition correspondant au sommet.

Le monome partition correspondant au sommet a pour exposants successifs (CH I, D,2)

.../...

$$r_1 = (k_1 + k'_1) + \ldots + (k_n + k'_n)$$

$$r_2 = (k_2 + k'_2) + \ldots + (k_n + k'_n)$$

$$r_p = (k_p + k'_p) + \ldots + (k_n + k'_n)$$

$$r_n = k_n + k'_n$$

Soit maintenant $R_i = (K_i + K'_i + \ldots + K_n + K'_n)$ la suite des exposants des monomes partitions correspondant à un terme quelconque du développement de AA' , avec $K_i + K'_i \geqslant K_{i+1} + K'_{i+1}$, les K_i étant des permutations des k_j et les K'_i des permutations des k'_j. Je dis que $R_i \geqslant r_i$, pour tout i compris entre 1 et n.

On a $k_1 + \ldots + k_{i-1} \geqslant K_1 + \ldots + K_{i-1}$

$$k'_1 + \ldots + k'_{i-1} \geqslant K'_1 + \ldots + K'_{i-1}$$

puisque les k_p ne sont autresque les K_p rangés dans un ordre non croissant.

Si on pose $N = \sum_{1,n} k_i + \sum_{1,n} k'_i$

d'où $r_i = N - \sum_{1}^{i-1} (k_j + k'_j) \leq R_i = N - \sum_{1}^{i-1} (K_j + K'_j)$

$r_i \leq R_i$ ce qui démontre la proposition.

Remarque.

Si on fait le produit de deux n mots monogènes commutatifs réduits, le sommet ne peut se réduire et son coefficient est égal à 1.

Définition.

On appelle n-mot monogène élémentaire commutatif un n-mot monogène commutatif $(u^{k_1} o \ldots o u^{k_n})$, où tous les exposants k_i sont égaux à 0 ou 1. Si on pose $u^o = I$, tout n mot monogène commutatif élémentaire s'écrit $(u^{oi} o I^{o(n-i)})$, et on désigne par s_i le n-mot réduit correspondant $(u^{oi} o I^{o(n-i)} = i!\,(n-i)!\, s_i$

.../..

Théorème des n-mots monogènes commutatifs réduits.

Tout n mot monogène commutatif réduit $| u^{k_1} o \ldots o u^{k_n} |$ où $k_i \geq k_{i+1}$ s'exprime d'une manière unique comme fonctions linéaires à coefficients entiers de monomes de la forme $s_1^{p_1} \ldots s_n^{p_n}$ où la partition $1^{p_1} \ldots n^{p_n}$ est diviseur (CH I, D, No 2) de la partition conjuguée de $(k_1, \ldots, k_n)$. La démonstration se fait par récurrence sur les hauteurs : on suppose le théorème démontré pour toutes les hauteurs inférieures à $(k_1, \ldots, k_n)$. Il existe un monome et un seul $s_1^{q_1} \ldots s_n^{q_n}$ dont le sommet du développement est $| u^{k_1} o \ldots o u^{k_n} |$. Or le sommet de $s_1^{q_1} \ldots s_n^{q_n}$ est évidemment $| u^{q_1+\ldots+q_n} o u^{q_2+\ldots+q_n} o \ldots u^{q_n} |$, ce qui conduit au système d'équations linéaires.

$$k_i = q_i + \ldots + q_n \qquad (1 \leq i \leq n)$$

dont la résolution est immédiate $q_i = k_i - k_{i-1}$. D'ailleurs la partition $1^{q_1} \ldots n^{q_n}$ est la partition conjuguée de $k_1, \ldots, k_n$ (CH I,D,No 3) et tous les termes intervenant dans le développement de $s_1^{q_1} \ldots s_n^{q_n}$ correspondent à des partitions multiples de $(k_1, \ldots k_n)$, d'après la proposition qui précéde, donc dont la conjuguée est diviseur de $1^{q_1} \ldots n^{q_n}$.

On applique ensuite l'hypothèse de récurence à $| u^{k_1} o \ldots o u^{k_n} | - s_1^{q_1} \ldots s_n^{q_n}$ dont le développement ne contient que des n mots de hauteur inférieure à $(k_1, \ldots, k_n)$ et correspondant à des partitions multiples de $(k_1, \ldots, k_n)$.

Remarques I.

Un exemple classique de n-mots monogènes commutatifs réduits est fourni par le polynome symétrique en un système d'indéterminées $x_1, \ldots, x_n$.

.../...

A la somme $\sum x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ on fait correspondre le n-mot $(u^{k_1} o \dots o u^{k_n})$ (si on prend les n! termes), et à la somme réduite, si certains exposants sont égaux le n-mot réduit $| u^{k_1} o \dots o u^{k_n} |$. Nous verrons un autre modèle à propos des matrices. Nous n'avons rencontré nulle part l'introduction du treillis des partitions pour préciser ceux des $s_1^{p_1} \dots s_n^{p_n}$ qui intervenaient dans l'expression de $| u^{k_1} o \dots o u^{k_n} |$

3 Bis <u>Coefficients d'un produit de n-mots monogènes élémentaires.</u>

Soit le produit $s_{m_1} \dots s_{m_p} = P$ avec $m_1 \geq m_2 \dots \geq m_p$, et $s_k = | u^{ok} o I^{on-k} |$

et soit le produit $P' = s'_{m_1} \dots s'_{m_p}$ avec $s'_{m_i} = | u_i^{om_i} o I^{on-m_i} |$,

les u_i étant des mots distincts.

D'après la proposition II du No 1

$$s'_{m_1} \dots s'_{m_p} = \sum | u_{i_1} \dots u_{i_{p1}} o \dots o u_{j1} \dots u_{j_{pk}} o I^{o(n - \sum p_q)} |$$

où tous les coefficients sont égaux à 1, et où la somme $\sum$ est étendue à toutes les combinaisons possibles de $(P_1, \dots, P_k)$ les P_i étant définis comme suit

a) P_i contient p_i indices distincts pris parmi 1,2,... p.

b) Dans la suite $(P_1, \dots, P_k)$ l'indice i figure au total m_i fois.

On peut associer, à tout terme du développement de façon bijective une matrice (h_{ij}) définie à une permutation de lignes près de la manière suivante : si le j ème mot du terme considéré contient le mot u_i, on posera $h_{ij} = 1$. Sinon $h_{ij} = 0$

Ainsi à $| u_1 u_2 u_3 \text{ ou } u_1 u_2 \text{ ou } u_3 u_4 |$ correspondront les matrices qui se déduisent de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & & \\ & & & 11 \end{pmatrix}$ par une permutation quelconque des lignes

.../...

Le nombre d'éléments de la j ième colonne de h_{ij} est ainsi égal à m_j, et le nombre de termes du développement est le nombre total de matrices (à une permutation de lignes près) qui répondent à ces conditions. Si maintenant on fait la spécialisation $u_i \to u$, $\forall i$, le produit des s' devient le produit des s. Supposons qu'une matrice (h_{ij}) ait r lignes contenant le même nombre de 1, et qu'on puisse partager ces r lignes en groupements de $r_1, \ldots, r_t$ lignes ayant leurs 1 dans les mêmes colonnes. Dans ces conditions le n-mot

$\left| B_1'^{or_1} o \ldots o B_t'^{or_t} o \ldots \right|$ deviendra après la spécialisation

$B_i' \to B$; $\frac{r!}{\prod r_j!} \left| B^{or} o \ldots \right|$

C'est dire qu'un terme affecté du coefficient 1 dans le produit des s' sera affecté du coefficient $\frac{r!}{r_1! \ldots r_t!}$ dans le produit des s.

On peut toujours dans le développement du produit des s', supposer dans chaque terme $p_i \geq p_{i+1}$, puisque les n-mots sont commutatifs. Si on ne considère que les matrices h_{ij} dans lesquelles le nombre d'éléments de chaque ligne est $p_i \geq p_{i+1}$, on voit aisément qu'une matrice h_{ij} étant fixée avec r lignes ayant le même nombre d'éléments, r_q lignes ayant leurs éléments dans les mêmes colonnes (pour $q = 1, \ldots, t$) le nombre de matrices distinctes que l'on peut former par permutation des lignes est $\frac{r!}{\prod r_i!}$. On a donc le résultat suivant :

PROPOSITION.

Le coefficient du monome réduit $\left| u^{p_1} o \ldots o u^{p_k} \right|$ dans le développement de $s_{m_1} \ldots s_{m_p}$ avec $m_i \geq m_{i+1}$ et $p_i \geq p_{i+1}$ est égal au nombre de matrices distinctes formées de 1 et de 0 qu'on peut former ayant m_i chiffres 1 dans la i-ème colonne et p_i chiffres 1 dans la i ème ligne.

.../...

Corollaire.

Si on désigne par $\begin{pmatrix} m_1 & & m_p \\ p_1 & & p_k \end{pmatrix}$ ce coefficient lié à deux partitions d'un même nombre, on a la propriété suivante :

$$\begin{pmatrix} m_1 & & m_p \\ p_1 & & p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & & p_k \\ m_1 & & m_p \end{pmatrix}$$

Il suffit de se reporter à la définition et de considérer les matrices transposées de celles relatives au premier coefficient, pour obtenir le deuxième. (Cf CAYLEY, SALMON, VAN DER CORPUT).

Si en particulier $(p_1,\ldots,p_k)$ est la partition 1^n du nombre n, le nombre de matrices h_{ij} est égal au coefficient polynomial $\begin{pmatrix} m_1 & & m_n \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$ $\dfrac{n!}{m_1!\ldots m_n!}$. Si les deux partitions m_i et p_j sont $(1,\ldots,1)$ on retrouve les matrices de permutations.

On peut représenter les matrices h_i^j par un ensemble de couples d'indices $\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$ o...o $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = S$ où $\begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix}$ désignent les numéros des lignes et colonnes où figurent un 1. Les q_i et les p_i peuvent être distincts ou non, mais où un même couple ne peut figurer deux fois. Deux n-uples de couples seront rangés dans une même classe s'ils se déduisent l'un de l'autre par permutation des indices supérieurs ou des indices inférieurs. Le nombre d'éléments de chaque classe est le coefficient correspondant à la matrice (h_i^j) considérée.

Exemple.

Soit à calculer le coefficient de $s_2\ s_1 s_1$ pour $\sum x_1^2\ x_2$.

Il faut considérer les matrices à trois lignes et 3 colonnes ayant 2 éléments 1 dans la première ligne et dans la première colonne, et un élément 1 dans les deuxième et troisième rangée (ligne et colonne).

.../...

On trouve ainsi $\begin{pmatrix}1&1\\1&\\&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\&&1\\1&\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&\\&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&\\&11\\1&\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&\\&1\\1&\end{pmatrix}$

soit 5 matrices : le coefficient cherché est donc 5.

On retrouve le même résultat en considérant les quadruples de couples

$\binom{1}{1}\circ\binom{2}{1}\circ\binom{1}{2}\circ\binom{3}{3}$, $\binom{1}{1}\circ\binom{2}{1}\circ\binom{3}{2}\circ\binom{1}{3}$, $\binom{1}{1}\circ\binom{3}{1}\circ\binom{1}{2}\circ\binom{2}{3}$, $\binom{2}{1}\circ\binom{3}{1}\circ\binom{1}{2}\circ\binom{1}{3}$

$\binom{1}{1}\circ\binom{3}{1}\circ\binom{2}{2}\circ\binom{1}{3}$ formés de couples distincts et ayant deux indices 1

un indice 2 et un indice 3 supérieurs.

Remarque.

En permutant les rôles des 1 et des 0 dansles matrices h_i^j qui sont rectangulaires kp , on voit que le coefficient $\begin{pmatrix}m_1 & m_p\\ p_1 & p_k\end{pmatrix}$

où $\sum m_i = \sum p_j = n$, se retrouve dans les partitions de kp-n formés par les zéros au lieu des 1. $\begin{pmatrix}m_1 & m_p\\ p_1 & p_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}m'_1 & m'_p\\ p'_1 & p'_k\end{pmatrix}$.

4. Cas où les n mots commutatifs sont multilinéaires.

Nous supposerons dans ce paragraphe que les mots appartiennent à un module sur un anneau commutafif R, et que les n-mots sont multilinéaires, c'est à dire que

$(u_1,\dots,u_i+u'_i,\dots,u_n) = (u_1,\dots,u_i,\dots,u_n) + (u_1,\dots,u'_i,\dots,u_n)$

$(u_1,\dots,au_i,\dots,u_n) = a\,(u_1,\dots,u_n)$ $(a \in R, \forall i)$.

Si on prend des n-mots commutatifs multilinéaires, on a le Théorème de PHILLIPS (Cf Max Duffee, p.I8)

.../...

Les T_i , T'_j, T''_k étant des mots permutables entre eux, et les u_i, u'_j , u''_k des mots quelconques, les relations

$$(1)\ \sum u_i T_i = 0 \quad \sum u'_j T_j = 0 \quad \sum u''_k T''_k = 0$$

entraînent $\sum (u_i \text{ ou}'_j \text{ ou}''_k)\ (T_i T'_j T''_k \circ x_1 \circ x_2) = 0$, quels que soient les mots x_1, x_2, la somme $\sum$ étant étendue à tous les arrangements des indices i,j,k.

Si on effectue, chaque terme du développement du produit symétrisé est séparément nul d'après les hypothèses. Par exemple, i et k étant fixes $\sum_j (u_i x_1 \text{ ou}'_j\ T_i T'_j T''_k \text{ ou}''_k x_2) = 0$, en vertu de la deuxième relation (1) et de $T_i T'_j = T'_j T_i$.

Si en particulier lesmots T_i sont des indéterminées, le résultat reste valable, à condition de spécialiser ces indéterminées en éléments permutables après avoir effectué le produit symétrisé.

Exemple.

Si u_1 et u_2 sont permutables, des relations

$$(1')\ Iu_1 - T_1 I = 0 \qquad Iu_2 - T_2 I = 0$$

on tire si T_1 et T_2 sont permutables

$$(u_1 \text{ou}_2)\ (Iox) - (Iou_2)\ (T_1 ox) - (Iou_1)\ (T_2 ox) + (IoI)\ (T_1 T_2 ox)$$

Or les relations (1') sont vérifiées si on choisit $T_1 = u_1$, $T_2 = u_2$.

En faisant $u_1 = u_2$ on retrouve la formule de Cayley Hamilton pour n = 2.

Pratiquement, on effectue le calcul de

$(u_1 - T_1 I) \circ (u_2 - T_2 I)$ en considérant T_1 et T_2 comme des indéterminées adjointes à l'anneau R

.../...

$(u_1-T_1I) \circ (u_2-T_2I) = (u_1 \circ u_2)I-T_1 (I \circ u_2)-T_2 (I \circ u_1)-T_1T_2 (u_1 \circ u_2 I)$

et T_1, T_2 étant permutables, on remplace I par Iox, T_i par $T_i \circ x$ T_iT_j par $T_iT_j \circ x$, du moment que $u_i-T_iI = 0$.

Exemple II.

De la même manière, on montrerait que $u-T\ I = 0$ entraîne que si on effectue le calcul de $(u-TI)^{\circ k}$ en considérant T comme un élément de R, puis en remplaçant dans le résultat obtenu T par $u^p \circ x_1 \circ \ldots \circ x_{k-1}$, on obtient un résultat nul $\forall x_i$, car $u-uI = 0$. C'est la formule de Cayley Hamilton.

5. Rang et équation caractéristique d'un mot appartenant à un R module E.

Un mot v est dit de rang k, si $v^{\circ k} \neq 0$ et $v^{\circ k+1} = 0$. Si tous les mots (vecteurs de E), ont au plus un rang égal à n, on appelle polynome caractéristique de $u \in E$, le polynome

$(u-sI)^{\circ n}$, où s est une indéterminée adjointe à R.

En vertu de la multilinéarité de l'opération o, on aura par application de la formule du binôme

$$(u-sI)^{\circ n} = u^{\circ n} - C_n^1\ s\ (I \circ u^{\circ n-1}) + \ldots (-1)^p C_n^p\ s^p (I^{\circ p} \circ u^{\circ n-p}) + \ldots + (-1)^n s^n \mid I^{\circ n} \mid$$

En vertu de la formule de Cayley Hamilton (No 2, ou 4 Exemple II), u vérifie sa propre équation caractéristique, c'est à dire qu'on obtient un résultat nul en remplaçant s^p par $(u^p \circ x_1 \circ \ldots \circ x_{n-1})$ quels que soient les vecteurs de E: $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

En passant aux n-mots réduits, l'équation caractéristique s'écrit simplement

$$0 = \mid u^{\circ n} \mid + \ldots + (-1)^p s^p \mid I^{\circ p} \circ u^{\circ n-p} \mid + \ldots + (-1)^n s^n \mid I^{\circ n} \mid$$

les coefficients binomiaux ayant disparu.

.../...

Supposons que les n-mots prennent leur valeur dans R. Dans ce cas $|I^{op} \text{ ou}^{on-p}|$ s'appelle la trace d'ordre p de u. La trace d'ordre n-1 de u est la trace de u, la trace d'ordre o ou $|u^{on}|$ est le déterminant de u.

Si on suppose que R est un corps algébriquement clos et que le n-mot a sa valeur dans R, on a les propriétés suivantes :

Propriété I.

R étant algébriquement clos, l'expression $|u^{k_1} o \ldots o u^{k_n}|$ est égale à $\sum s_1^{k_1} \ldots s_n^{k_n}$ fonction symétrique des racines s_i de l'équation caractéristique de u.

Le produit de deux sommes réduites fondamentales $\sum s_1^{k_1} \ldots s_n^{k_n}$ et $\sum s_1^{k'_1} \ldots s_n^{k'_n}$ est en effet donné par lesmêmes régles de calcul que celles donnant $|u^{k_1} o \ldots o u^{k_n}|$ $|u^{k'_1} o \ldots o u^{k'_n}|$. D'ailleurs pour les fonctions symétriques élémentaires des s_i, on obtient les n-mots monogènes élémentaires réduits $|u^{op} o I^{on-p}| = \sum s_1 \ldots s_p$ d'après la forme de l'équation caractéristique, ce qui démontre la proposition en vertu du théorème des n-mots monogènes commutatifs réduits. En particulier, la trace de la k-ième puissance de u : $|u^k o I^{on-1}| = \sum s_i^k$ somme des k ièmes puissances des racines, et la formule de Cayley-Hamilton donne alors les formules de Newton pour les sommes des puissances semblables des racines d'une équation.

PROPRIETE II.

La trace de $u = u_1 u_2 \ldots u_q$ ne change pas si on permute circulairement les u_i.

Si R est un corps commutatif, on a

$$|I^{on-1} o u_1 u_2 \ldots u_p| \, |I^{on-1} o u_{p+1} \ldots u_q| = |I^{on-1} o u_{p+1} \ldots u_q| \, |I^{on-1} o u_1 \ldots u_p|$$

En développant le premier membre, on obtient

$$|I^{on-2} o u_1 \ldots u_p o u_{p+1} \ldots u_q| + |I^{on-1} o (u_1 \ldots u_p u_{p+1} \ldots u_q|$$

.../...

et le deuxième

$$\left| I^{on-2} \circ u_{p+1} \cdots u_q \circ u_1 u_2 \cdots u_p \right| + \left| I^{on-1} \circ (u_{p+1} \cdots u_q u_1 \cdots u_p \right|$$

Les deux premiers termes étant égaux dans les deux développements, il en est de même des deux derniers.

Conséquence I.

Si $u = u_1 \cdots u_q$, la trace de u^k ne change pas si on effectue sur les u_i une permutation circulaire.

Car une permutation circulaire sur les q facteurs de u revient à effectuer une permutation circulaire sur les kq facteurs de u^k.

Conséquence II.

Si $u = u_1 \cdots u_q$, l'équation caractéristique de u est la même que celle de tout v se déduisant de u par une permutation circulaire des u_i, si R est un corps de caractéristique 0 .

Car les formules de Newton permettent de déduire univoquement les coefficients de l'équation caractéristique de u en fonction des traces des éléments de la forme u^k. Or, d'après la conséquence I, la trace de u^k est la même que celle de v^k, $\forall k$.

En particulier $u_1 u_2$ et $u_2 u_1$ ont la même équation caractéristique (cf Mac Duffee, p. 23).

6. Propriétés d'invariance. Lemme. $a, b, u_1, \ldots, u_k$ étant des mots quelconques, on a $\left| a^{ok} \right| \left| u_1 \circ \cdots \circ u_k \right| \left| b^{ok} \right| = \left| au_1 b \circ \cdots \circ au_k b \right|$.

Il suffit d'appliquer la formule du produit symétrisé aux trois k-mots commutatifs figurant dans le premier membre.

Si en particulier, en supposant que les mots appartiennent à un R module et les n-mots prennent leur valeur dans R on déduit du lemme les propriétés d'invariance suivantes :

PROPRIETE I.

Si $\left| a^{on} \right| = \left| b^{on} \right| = 1$ (élément unité de R), ou si $ab = I$ on a $\left| au_1 b \circ \cdots au_2 b \cdots \circ au_n b \right| = \left| u_1 \circ \cdots \circ u_n \right|$.

.../...

Pour cette raison, le n mot réduit $|u_1 o \ldots o u_n|$ est appelé invariant simultané des mots $u_1, \ldots, u_n$.

De même, dans les mêmes conditions, $|u_{i_1} o \ldots u_{i_k} o I^{on-k}|$ est aussi un invariant simultané de $u_1, \ldots, u_n$ quelle que soit la combinaison $(i_1, \ldots, i_k)$ des indices 1,2,..., n.

Conséquence.

En particulier les coefficients de l'équation caractéristique de u restent inchangés si on remplace u par aub (avec $|a^{on}| = |b^{on}| = 1$, ou ab = I).

PROPOSITION II.

On a $|u^{ok}|\,|v^{ok}| = |uv|^{ok}$ en vertu de la formule du produit symétrisé. En particulier le déterminant de uv est le produit des déterminants de u et de v. (k= n). Si R est commutatif, le déterminant de uv est donc égal au déterminant de vu.

7. Extension par polarisation de la formule de CAYLEY HAMILTON.

Supposons toujours que les mots u_i fassent partie d'un R-module, et posons $u = k_1 u_1 + \ldots + k_p u_p$, les k_i étant des indéterminées qu'on adjoint à l'anneau R, commutatif.

Le coefficient de s^{n-r} dans l'équation caractéristique de u $|u-sI|^{on} = 0$ est $a_r = (-1)^r |I^{on-r} o u^{or}|$, ou

$a_r = (-1)^r \Sigma |I^{on-r} o u_1^{or_1} o \ldots o u_p^{or_p}|\, k_1^{r_1} \ldots k_p^{r_p}$ avec $\Sigma r_i = r$

On a d'ailleurs $u^q = \Sigma (S u_1^{q_1} \ldots u_p^{q_p})\, k_1^{q_1} \ldots k_p^{q_p}$, avec $\Sigma q_i = q$ et en désignant par $S u_1^{q_1} \ldots u_p^{q_p}$ le symétrisé de $u_1^{q_1} \ldots u_p^{q_p}$ divisé par $\Pi q_i!$

../..

En écrivant que dans la formule de Cayley Hamilton pour u, le coefficient de $k_1^{s_1} \dots k_p^{s_p}$ est nul, on obtient une formule dûe à Sylvester

(Cf Wedderburn p. II2)

$$0 = \sum_r \sum_{r_1,\dots r_p} (-1)^r \left| I^{on-r} o\, u_1^{or_1} o u_2^{or_2} o \dots u_p^{or_p} \right| \left| S u_1^{s_1-r_1} \dots u_p^{s_p-r_p} o x_1 ; \dots x_{n-1} \right|$$

quels que soient les mots $x_1, \dots, x_{n-1}$.

Exemple.

Pour $p = 2$ avec $u = u_1 + k\, u_2$

$$\left| (u_1+ku_2)^2 o x \right| \left| I o I \right| - 2\, (u_1+ku_2\, o x)\, (I o\, u_1+ku_2) + (u_1+ku_2\, o\, u_1+ku_2) = 0$$

donne en prenant le coefficient de k

$$((u_1 u_2 + u_2 u_1) o x)\, (IOI) - 2\, (u_2 o x)(u_1 o I) - 2 (u_1 o x)(u_2 o I) + 2\, (u_1 o u_2) = 0$$

8. Le théorème de Poisson-Schlafli.

Dans ce paragraphe, nous étudierons des conséquences de la formule (S) du paragraphe précédent au cas où on a $u_i u_j = u_j u_i$, $\forall i, j$, c'est à dire si les mots u_i sont permutables. La formule devient alors

$$0 = \sum_r \sum_{r_1 \dots r_p} (-1)^r \left| I^{on-r} o u_1^{or_1} o \dots o\, u_p^{or_p} \right| \frac{\left| (s_i - r)! \left| u_1^{s_1-r_1} \dots u_p^{s_p-r_p} o x_1 \dots x_{n-1} \right| \right|}{(s_1-r_1)! \dots (s_p-r_p)!}$$

On appellera n-mot p-aire un n-mot commutatif de la forme

$$U = (u_1^{q_1^1} u_2^{q_2^1} \dots u_p^{q_p^1} o \dots u_1^{q_1^n} \dots u_p^{q_p^n})$$

.../...

où les exposants q_i^j sont des entiers rationnels positifs ou nuls, qu'on peut disposer suivant un tableau à p lignes et n colonnes, Si p = 1, on retrouve les n-mots commutatifs monogènes.

On appelle n-mot p-aire commutatif élémentaire tout n-mot p-aire tel que $\sum_i q_i^j$ soit égal à 0 ou 1 pour tous les indices j. On montre aisément que le nombre des n-mots p-aires élémentaires est $C_{n+p}^n - 1$ (Cf KONIG, p. 312,). Exemple : n = 3, p = 2, on a $(u_1 o u_1 o I)$, $(u_1 o I o I)$ $(u_1 o u_1 o u_1)$, $(u_2 o I o I)$, $(u_2 o u_2 o I)$, $(u_2 o u_2 o u_2)$, $(u_1 o u_2 o I)$, $(u_1 o u_2 o u_2)$, $(u_1 o u_1 o u_2)$.

On appellera n-mot p-aire k-uple, tout n mot tel que $\sum_i q_i^j$ soit nul pour tous les indices j, sauf k d'entre eux. Si k=1,2, on aura un n-mot p-aire simple, double etc.

Théorème de Poisson-Schlaffi (Cf Konig, p.316) Tout n-mot p-aire réduit peut s'exprimer linéairement en fonction de produits de n-mots p aires élémentaires réduits, avec des coefficients rationnels.

La démonstration calquée sur la démonstration classique (cf Konig loc cit) se fait par récurrence sur k.

a) Cas du n-mot simple.

Soit $U = (u_1^{q_1} u_2^{q_2} \ldots u_p^{q_p} o I^{on-I})$. Posons $\sum q_i = q$

On part de l'expression (1) $\left| u^q o I^{on-1} \right| = \sum h_i P_i$, les P_i étant des produits de n-mots élémentaires monogènes réduits et les h_i des entiers rationnels. Si on pose maintenant

$u = k_1 u_1 + \ldots + k_p u_p$, les k_i étant des indéterminées qu'on adjoint au corps Q des rationnels.

Les deux membres de (1) donnent des polynomes suivant les k_i qui sont égaux. Or le seul coefficient de $k_1^{p_1} \ldots k_p^{q_p}$ dans le premier membre est égal à U qui s'exprime comme fonction linéaire de produits de n-mots élémentaires p-aires dans le deuxième membre.

.../...

b) Le théorème étant démontré pour les n-mots p-aires simples, admettonq qu'il soit vrai pour les n-mots p-aires k-uples.

De la formule

$$(U_1 o \ldots o\ U_k\ o\ I^{on-k})(U_{k+1} o I^{on-1}) = h\ (U_1 o \ldots o U_k o U_{k+1} o I^{on-k-1}) + P,$$

h étant un entier rationnel, et P une somme n-mots p-aires au plus k-uples, on déduit d'après l'hypothèse de récurrence que le premier membre et P s'expriment comme forme linéaire des n-mots p-aires élémentaires réduits à coefficients rationnels. Il en est donc de même de

$$(U_1 o \ldots o\ U_k o U_{k+1} o . I^{on-k-1}).$$

Remarque.

Si on se donne p systèmes de n indéterminées

$(x_1^1, \quad x_1^n) \ldots (x_p^1, \quad x_p^n)$, la règle du produit symétrisé permet d'établir un isomorphisme entre les n-mots p-aires et les polynomes symétriques suivant les p systèmes. De façon précise, au n-mot p-aire

$$U = (u_1^{q_1^1} \ldots u_p^{q_p^1} \quad o \ldots o\ u_1^{q_1^n} \ldots u_p^{q_p^n})$$

On fera correspondre dans cet isomorphisme le polynome symétrique

$$U' = \sum x_1^{q_1^1} \ldots x_i^{q_i^j} \ldots x_p^{q_p^n}$$

la somme étant étendue à toutes les permutations des indices 1,2,...,n supérieurs en laissant fixes les exposants q_i^j.

Exemple.

C'est ainsi que si on a trois systèmes de deux indéterminées (x_1,x_2), (y_1,y_2), (z_1,z_2) $(p = 3,\ n = 2)$ les indices inférieurs étant remplacés par des lettres distinctes, au deux mot

.../...

$(u_1^{q_1^1} \; u_2^{q_2^1} \; u_3^{q_3^1} \circ u_1^{q_1^2} \; u_2^{q_2^2} \; u_3^{q_3^2})$ correspondra le polynome symétrique

$$x_1^{q_1^1} \, y_1^{q_2^1} \, z_1^{q_3^1} \, x_2^{q_1^2} \, y_2^{q_2^2} \, z_2^{q_3^2} + x_2^{q_1^1} \, y_2^{q_2^1} \, z_2^{q_3^1} \, x_1^{q_1^2} \, y_1^{q_2^2} \, z_1^{q_3^2} .$$

A $x_1^p \, y_2^q + x_2^p \, y_1^q$ correspondra le deux mot $(u_1^p \; ou_2^q)$, à

$(x_1^p \, y_1^q + x_2^p \, y_2^q)$ le deux mot $(u_1^p \; u_2^q \circ I)$ etc.

Remarque.

Les n-mots paires élémentaires sont liés par des relations si $p \geq 2$ (Cf Serret, p. 600 T.I , Konig p 3I6, Encyclopédie, I, 9 Netto Levavasseur, p. 22;).

9. Racines de l'équation caractéristique de f (u, u', u",...) où f est un polynome en u, u', u" supposés permutables.

Nous supposerons ici que les mots u, u', u" sont permutables et sont des vecteurs d'un R-module, R étant un corps algébriquement clos, un n-mot commutatif prenant sa valeur dans R. Nous supposerons de plus que si un polynome P à coefficient dans R est tel que P (u) = 0, les racines de P contiennent toutes les racines de l'équation caractéristique de u, et de même pour u', u",...

THEOREME (Frobenius, Mac Duffee, P. 22). Si $(s_1,\ldots, s_n)$, $(s'_1,\ldots,s'_n)$ $(s''_1 ,\ldots, s''_n)$ sont les racines des équations caractéristiques de u, u', u", on peut les écrire dans un ordre tel que f (u,u',u") ait pour racines caractéristiques f (s_i, s'_i, s''_i).

Si x, y, z, t sont des indéterminées, de la relation

.../...

$$f(x,y,z) - f(s_i,s'_j,s''_k) = \left[f(x,s'_j,s''_k) - f(s_i,s'_j,s''_k)\right] + \ldots$$

$$+ \left[f(x,y,s''_k) - f(x,s'_j,s''_k)\right] + \left[f(x,y,z) - f(x,y,s''_k)\right]$$

$$= (x-s_i) f_{ijk} + (y-s'_j) g_{ijk} + (z-s''_k) h_{ijk},$$

on déduit $\prod_{i,j,k} (f(x,y,z) - f(s_i,s'_j, s''_k) = K P(x) + L Q(y) + M R(z)$

où P (x), Q (y), R (z) sont des multiples du polynome caractéristique de u,u',u

Comme u, u', u" sont permutables , on en déduit

$$\prod_{i,j,k} (f(u,u',u") - f(s_i,s'_j,s''_k)) = K P(u) + LQ(u') + MR(u") = 0$$

et par suite $\prod(t - f(s_i,s'_j, s''_k))$ s'annule pour $t = f(u,u',u")$.

Les racines caractéristiques de f (u,u',u") figurent donc parmi les f (s_i,s'_j,s''_k) d'après les hypothèses faites. On ordonnera les s_i,s'_j s''_k en désignant par f (s_i,s'_i,s''_i) la ième racine de $(f-tI)^{on}$.

Corollaire.

En particulier u^k a pour racines de l'équation caractéristique les puissances k-ièmes des racines caractéristiques de u.

10. Mots réciproques.

Deux mots u et v sont dits réciproques si on a

$$(u^{k_1} o \ldots o\, u^{k_n})\,(v^{m_1} o \ldots o\, v^{m_n}) = (u^{m_1} o \ldots o\, u^{m_n})\,(v^{k_1} o \ldots o\, v^{k_n})$$

quelles que soient les suites d'indices $k_1,\ldots, k_n$ et $m_1,\ldots,m_n$, telles que

$\sum k_i = \sum m_i$.

Il résulte immédiatement de la définition que si $a_k = |u^{ok} o\, I^{on-k}|$ et $b_k = |v^{ok} o\, I^{on-k}|$ sont les n-mots élémentaires réduits de u et v, on a la relation $a_k\, b_1^k = a_1^k\, b_k$, car le développement du produit symétrisé de b_1^k par exemple est une somme de n-mots de la forme $(v^{m_1} o.\, v^{m_n})$ où $\sum m_i = k$.

.../...

Si les n-mots appartiennent à un corps commutatif, la condition précédente exprime que les équations caractéristiques de u et v ont leurs racines proportionnelles, et la condition

$$\frac{a_k}{b_k} = \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^k \quad \text{pour } \forall\, k$$

entraine alors que u et v sont réciproques.

D'une manière générale, la condition $a_k b_1^k = b_k a_1^k$, pour tout k entraine que les deux mots u et v sont réciproques.

J.G. Van der CORPUT introduit des opérateurs différentiels de la forme

$$\left[k_1,\ldots,k_r\right] = \sum_{m_1=k_1}^{m} \quad \sum_{m_r=k_r}^{m} a_{m_1-k_1}\cdots a_{m_r-k_r} \frac{\partial^r}{\partial a_{m_1}\ldots\partial a_{m_r}},$$

les a_i $(1 \leqslant i < m)$

étant des indéterminées (qui sont les n-mots élémentaires réduits), et démontre que le produit de ces opérateurs différentiels est un produit symétrisé (Théorème d'isomorphie 2), que l'on a

$$(v^{k_1},\ldots, v^{k_r})\,(u^{m_1} \circ\ldots\circ u^{m_t}) = (v^{m_1} \circ\ldots\circ v^{m_t})\,(u^{k_1} \circ\ldots\circ u^{k_r})$$

si $\sum k_i = \sum m_j$, et que $P = (v^{k_1} \circ\ldots\circ v^{k_r})\, a_{m_1}\ldots a_{m_t} = 0$ si la partition $k_1,\ldots,k_r$ différe de la partition $m_1,\ldots,m_t$, et que $P = 1$ si ces partitions sont les mêmes.

../...

C. n-MOTS ALTERNES

Pour la définition, cf CH.III,A,N°4.

1. Premières propriétés.

PROPRIETE I.

Soit $A = (a_1 \wedge \ldots \wedge a_n)$ un n-mot alterné, et $B = (b_1,\ldots,b_n)$ un n-mot quelconque. Le produit symétrisé $AB = 0$, et le produit BA est une somme de n-mots alternés.

Car $A = \sum (-1)^I (a_{s1},\ldots,a_{sn})$, où I est le nombre d'inversions de s et où la somme est étendue à toutes les permutations s du groupe symétrique S_n. Si s et t sont deux permutations quelconques, on a

$$(a_{s1},\ldots,a_{sn})\,(b_1,\ldots,b_n) = (a_{t1},\ldots,a_{tn})\,(b_1,\ldots,b_n)$$

d'après la définition du produit symétrisé. Dans le produit symétrisé AB, on peut associer à toute permutation s, la permutation t différant de s par la transposition des deux derniers indices, et la somme

$$(-1)^I (a_{s1},\ldots,a_{sn})(b_1,\ldots,b_n) + (-1)^J (a_{t1},\ldots,a_{tn})(b_1,\ldots,b_n) = 0, \text{ si J}$$

est le nombre d'inversion de t.

Calculons maintenant $BA = \sum_t (b_{t1} a_1 \wedge \ldots \wedge b_{tn} a_n)$

C'est une somme de n! n-mots alternés, la somme précédente étant étendue aux n! permutations t du groupe symétrique S_n.

Remarque.

Le fait que BA est une somme de n-mots alternés se généralise même si le produit symétrisé est un produit symétrisé relatif à un sous-groupe G du groupe symétrique.

.../...

Il n'en est pas de même de la première partie de la Propriété. Par exemple, si G est formé de la permutation unité :

$$(a_1 \wedge a_2)\,(b_1, b_2) = (a_1, a_2)\,(b_1, b_2) - (a_2, a_1)\,(b_1, b_2)$$

$$= (a_1 b_1, a_2 b_2) - (a_2 b_1, a_1 b_2).$$

On a la propriété II.

Si $A = (a_1 \wedge \ldots \wedge a_n)$ et $B = (b_1, \ldots, b_n)$, le produit symétrisé AB relatif au groupe (e) est le développement du déterminant de

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 & & a_1 b_n \\ & & \\ a_n b_1 & & a_n b_n \end{vmatrix}$$

en gardant l'ordre des colonnes $(1, \ldots, n)$ la multiplication étant remplacée par une $(,)$.

2. Définition des fonctions de Schur.

Lemme. Il existe une application bijective entre l'ensemble des partitions d'un entier n, en somme d'entiers positifs ou nuls, et l'ensemble des partitions de $\frac{n\,(n+1)}{2}$ en entiers positifs ou nuls distincts.

Soit la partition $k_1 + \ldots + k_n = n$, $k_i \geq k_{i+1} \geq 0$ de n en n entiers ≥ 0. Considérons la suite $(k_1+n-1,\ k_2+n-2, \ldots,\ k_p+n-p, \ldots, k_n) = (k'_1, \ldots, k'_n)$. C'est une partition de $\frac{n(n+1)}{2}$ en entiers positifs ou nuls distincts, car

$$k'_i - k'_{i+1} = k_i - k_{i+1} + 1 > 0$$

Soit maintenant une partition de $\frac{n\,(n+1)}{2}$ en n' entiers positifs ou nuls distincts. La somme de n' entiers positifs distincts étant au moins égale à $\frac{n'\,(n'-1)}{2}$, on doit avoir $n'\,(n'-1) \leq n(n+1)$, ce qui impose $n' \leq n+1$. A part la partition $(n, n-1, \ldots, 0)$, toutes les partitions en nombres

.../...

distincts de $\frac{n(n+1)}{2}$ ont au plus n termes.

Cela étant si $(k'_1,\ldots, k'_n)$ est une partition de $\frac{n(n+1)}{2}$ en entiers positifs ou nuls distincts, on aura $k'_n \geq 0$, $k'_{n-1} \geq 1$, $k'_{n-p} \geq p$, et on pourra poser $k_p = k'_p - (n-p) \geq 0$, $k_p - k_{p+1} = k'_p - k'_{p+1} - 1 \geqslant 0$. Les k_p constituent une partition de n, ce qui démontre le lemme.

PROPOSITION.

Les (k'_1, k'_n) étant les partitions de $\frac{n(n+1)}{2}$ en nombres positifs distincts, les n-mots alternés $(u^{k'_1} \wedge \ldots \wedge u^{k'_n})$ sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des $|u^{k_1} o \ldots o u^{k_n}|\ (u^{n-1} \wedge u^{n-2} \ldots u \wedge I)$ les $(k_1,\ldots,k_n)$ étant les partitions de n.

Effectuons en effet le produit symétrisé

$$|u^{k_1} o \ldots o u^{k_n}|\ (u^{n-1} \wedge u^{n-2} \wedge \ldots \wedge u \wedge I) = \sum p_i\ (u^{k'_1} \wedge \ldots \wedge u^{k'_n})$$

D'après la théorie des n-mots monogènes réduits (B, No 3), l'entier p_i correspondant au sommet du deuxième membre est égal à 1, et toutes les partitions figurant dans ce second membre seront multiples des partitions correspondant à son sommet, donc de hauteur moindre. La proposition est alors démontrée par récurrence sur les hauteurs. Il en résulte que la matrice carrée des p_i d'ordre égal au nombre de partitions de n est inversible dans Z.

Si les n-mots (commutatifs ou alternés) prennent leur valeur dans un corps R, on voit que les n-mots réduits $|u^{k_1} o \ldots o u^{k_n}|$ s'expriment comme combinaison linéaire, de quotients de la forme

$$\frac{u^{k'_1} \wedge \ldots \wedge u^{k'_n}}{u^{n-1} \wedge \ldots \wedge u \wedge I}$$

C'est ce quotient qu'on appelle la fonction de Schur relative à la partition $k'_p + p - n = k_p$ de l'entier n. (Cf par exemple LITTLEWOOD).

.../...

3. Un théorème de Dedekind. (KONIG, p. 72).

THEOREME .

Soient $a_o, a_1, \ldots, a_m$ appartenant à un anneau commutatif R unitaire, les produits $P_r = a_o^{r_o} \ldots a_m^{r_m}$ où $r_o + \ldots + r_m = n+1$ s'expriment comme combinaisons linéaires à coefficients entiers des mineurs d'ordre n+1 de la matrice $b_i^j = a_{i-j}$ si $0 \leqslant i-j \leqslant m$ et $b_i^j = 0$, si $i-j < 0$, ou $i-j > m$.

La démonstration que nous donnerons fondée sur le même principe que le théorème précédent est basée sur le lemme suivant :

Lemme. Soient m+n+1 indices; 0,1,..., m+n. Il existe une application bijective de l'ensemble E des C_{m+n+1}^{n+1} combinaisons de ces indices n+1 à n+1 écrites dans l'ordre des indices croissants, sur l'ensemble F des combinaisons à répétitions de m+1 indices pris n+1 à n+1, ces combinaisons à répétitions étant écrites dans l'ordre lexicographique des indices non décroissants.

Pour établir cette correspondance bijective, à tout élément de F de la forme $(i_o, i_1, \ldots, i_n)$, nous ferons correspondre la suite

$f = (i_o, i_1+1, \ldots, i_p+p, \ldots, i_n+n)$. On obtient ainsi un élément de E, cobminaison n+1 à n+1 des m+n+1 indices, écrite dans l'ordre des indices strictement croissants. Réciproquement étant donné un élément de E où les indices sont écrits dans l'ordre strictement croissant, on obtient un élément de F écrit dans l'ordre des indices croissants en retranchant p au p+1 ème indice de la suite.

Le lemme étant démontré, considérons le produit symétrisé par rapport au groupe formé de la permutation identique

$P = (D^o \wedge D^{-1} \wedge \ldots \wedge D^{-n})\ (a^{i_o} o \ldots o\ a^{i_n})$, où la suite $(i_o, \ldots, i_n)$ est une combinaison n+1 à n+1 des m+n+1 premiers nombres écrits dans l'ordre strictement croissant et où $D^{-k}\ a^{i_p} = a^{i_p - k}$, avec $a^s = 0$, si $s < 0$.

.../...

D'après (1) Propriété II, le produit P peut s'écrire sous la forme du développement du déterminant de la matrice

$$\begin{vmatrix} a^{i_o} & a^{i_o-1} & \dots & a^{i_o-n} \\ a^{i_1} & a^{i_1-1} & \dots & a^{i_1-n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{i_n} & a^{i_n-1} & \dots & a^{i_n-n} \end{vmatrix}$$

où le signe du produit est remplacé par le signe (commutatif) o. On voit aisément que le terme non nul de ce déterminant ayant la plus forte hauteur (qui est un élément de F) est le terme diagonal, qui figure avec le coefficient 1. On a donc $P = a^{i_o} \circ a^{i_1-1} \circ \dots \circ a^{i_n-n} + Q$, Q étant une somme de termes de la forme $a^{i'_o} \circ \dots \circ a^{i'_n-n}$, de hauteurs inférieures à $(i_o, i_1-1, \dots, i_n-n)$. Si on admet que tous les termes de hauteur inférieures à celle du sommet s'expriment comme combinaison linéaire de produits de la forme

$$(D^o \wedge D^{-1} \wedge \dots \wedge D^{-n})\ (a^{i''_o} \circ \dots \circ a^{i''_n}),$$

le théorème de Dedekind est alors démontré par récurrence sur les hauteurs.

Remarque.

Pour prouver que le sommet du développement est bien le terme principal, considérons un terme quelconque du développement $a^{j_o} \circ \dots \circ a^{j_n}$. avec $j_p \leq j_{p+1}$. Si a^{j_o} est dans la première ligne de la matrice, $j_o \leq i_o$ et le résultat est prouvé. Sinon $j_o > i_o$ et il existe un a^{j_p} dans la première ligne, tel que $j_p > j_o > i_o$, contrairement au mode de formation de la matrice. Le premier élément du sommet est donc a^{i_o}. On poursuit ensuite par récurrence, en supprimant la première ligne et la première colonne de la matrice.

Remarque II.

Les n-mots alternés peuvent servir à définir les caractères du groupe symétrique. Le produit

$$(D^o \wedge D^{-1} \dots \wedge D^{-n})\ |u^{k_1} \circ I^{on-1}|\ |u^{k_2} \circ I^{on-1}|\ \dots\ |u^{k_n} \circ I^{on-1}|$$

développé a pour coefficients ces caractères (cf LITTLEWOOD, p. 67), (formule dûe à FROBENIUS).

.../...

D. DERIVATIONS ET POLARISATIONS.

Un cas important d'usage du produit symétrisé est celui des opérateurs de dérivation et de polarisation que nous examinerons ici.

1. Dérivations et formule de Leibnitz.

On considère deux familles de mots F et F'. Le produit de mots appartenant à F s'appellera "opérateur de dérivation", et on suppose qu'on peut définir le produit d'un mot de F par un mot de F'.

D'autre part, on suppose qu'il existe un mot $I \in F$, tel que $Iu = u$, $\forall u \in F'$ et $ID = DI = D, \forall D \in F$.

Dans ces conditions, considérons le produit symétrisé d'un n-mot de F, par un n-mot de F'

$$(d_1 \circ \dots \circ d_n)\,(u_1,\dots,u_n) = \sum (d_{i_1} u_1, \dots, d_{i_n} u_n)$$

étendue à toutes les permutations $i_1,\dots, i_n$ des indices $(1,\dots,n)$. Si on suppose tous les d_i égaux à I, sauf l'un d'entre eux égal à d, la formule devient $|\, d, I, \dots, I \,|\,(u_1,\dots,u_n) = \sum_i (u_1,\dots,u_{i-1},du_i, u_{i+1},\dots,u_n)$

On reconnaît la formule usuelle de dérivation d'un produit si on remplace le symbole, par un symbole de multiplication, ce qui justifie le terme "dérivation" pour les éléments $d \in F$.

Le produit symétrisé étant associatif, on a évidemment, d et d' étant deux dérivations permutables $(dd' = d'd)$: $(d,d')^m = \sum C_m^p\, (d^p d'^{m-p}, d^{m-p} d'^p)$

les C_m^p étant les coefficients du binome, et par suite

$$(d,d')^m\,(u,v) = \sum C_m^p\ (d^p d'^{m-p},\ d^{m-p}\, d'^p)\,(u,v)$$

Si d' = I, on retrouve la formule élémentaire de Leibnitz pour les dérivations d'un produit. On s'arrête dans l'application de la formule au milieu du développement du binome pour éviter la répétition de termes :

.../...

Exemple :

$$(doI)^3\ (uov) = \left[(d^3oI) + 3\ (d^2od)\right]\ (uov) = (d^3u\ ov)\ (d^2uodv)+3(duod^2v)$$
$$+ (u\ od^3v)$$

Remarque.

La formule de Leibnitz se généralise en considérant n dérivations permutables deux à deux $d_id_j = d_jd_i$, et en calculant $(d_1o...od_n)^k\ (u_1,...,$ par la formule donnant la puissance k-ème d'un polynome (qui s'applique puisque le signe o est commutatif).

2. Produit symétrisé de permutations généralisées d'ordre n. (Cf CH I,A)

Nous appellerons "permutation généralisée d'ordre n" ou" nPG" un ensemble de n couples d'indices $\binom{p_1}{q_1}o...o\binom{p_n}{q_n}$ et nous considérerons le Z-module engendré par les nPG. Ce Z-module devient une algèbre associative, si on définit sur les n-PG un produit associatif. En posant, (I,A,N[illegible]/ $\left(\binom{p}{q}\right)\left(\binom{p'}{q'}\right) = \binom{p}{q'}\ \binom{p'}{q}$, nous choisirons comme produit de deux n-PG le produit symétrisé des n-mots, les mots étant les couples.

Exemple :

$$\left(\binom{1}{1}\ o\ \binom{2}{1}\ o\ \binom{3}{2}\right)\left(\binom{4}{2}\ o\ \binom{5}{3}\ o\ \binom{6}{7}\right) = (\underline{0}\ o\ \underline{0}\ o\ \underline{0}) + \left(\binom{4}{1}\ o\ \binom{5}{2}\ o\ \underline{0}\right) +$$

$$+ (\underline{0}\ o\ \underline{0}\ o\ \underline{0}) + (\underline{0}\ o\ \binom{5}{2}\ o\ \underline{0}) + \left(\binom{4}{1}\ o\ \underline{0}\ o\ \underline{0}\right) + (\underline{0}\ o\ \underline{0}\ o\ \underline{0})$$

Nous réserverons le nom de "polarisation" à des n permutations généralisées où on considère comme équivalent au zéro de S toute permutation généralisée contenant un élément $\underline{0}$. On voit immédiatement que les polarisations engendrent une algèbre associative sur Z.

PROPRIETES I

Le produit de deux polarisations n'est différent de O que si les indices supérieurs de la première coincident à l'ordre près avec les indices inférieurs de la seconde :

.../.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

II. L'emploi des n-mots réduits permet, s'il y a des couples égaux dans une polarisation de réduire le nombre de termes égaux du produit (B,2) de deux polarisations.

III. Si les couples formant une polarisation ont leurs indices supérieurs et inférieurs formant des permutations des indices (1,...,n) la polarisation se réduit à une permutation, et le produit de deux telles polarisations redonne le produit habituel des permutations.

3. Produit d'une polarisation par un n-mot. Formule de Taylor.

Soit un n-mot $(u_{i_1},\ldots,u_{i_n}) = U$ où les i_p sont des indices. On suppose que ces n-mots sont des éléments d'un Z-module. Dans ces conditions, on pourra définir le produit d'une polarisation $P = \begin{pmatrix} p_1 & & p_n \\ q_1 & \ldots & q_n \end{pmatrix}$ par U. Par définition

$$PU = \sum (u_{r_1},\ldots,u_{r_n}) \quad \text{si} \quad \begin{pmatrix} p_1 & & p_n \\ q_1 & \ldots & q_n \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} i_1 & & i_n \\ i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix} = \sum \begin{pmatrix} i_1 & & i_n \\ r_1 & \ldots & r_n \end{pmatrix}$$

En particulier PU ne sera différent de 0, que si la suite $p_1,\ldots,p_n$ coincide à l'ordre près avec la suite $i_1,\ldots,i_n$.

Exemples $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} (u_1,u_1,u_3) = 2\,(u_2,u_2,u_1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} (u_1,u_1,u_3,u_2) = (u_4,u_5,u_1,u_3) + (u_5,u_4,u_1,u_3)$$

(WEDDERBURN, p. 27 utilise une notation légèrement différente pour le polaris d'un n-mot).

.../.

b) Formule de Taylor.

Supposons que les mots u_i soient éléments d'un R-module, R étant un anneau commutatif unitaire. Adjoignons à R, m indéterminées $x_1,\dots,x_m$ et à tout mot u_i, faisons correspondre le mot

$$v_i = x_1 u_i^1 + \dots + x_m u_i^m$$

et calculons $(v_1,\dots,v_n) = \sum x_1^{p_1} \dots x_m^{p_m} \quad R_{p_1\dots p_m}$

les p_i étant des entiers positifs ou nuls où $\sum p_i = n$. Calculons $R_{p_1\dots p_m}$.

On voit immédiatement en posant $u_i^j = d_j u_i$, $v_i = (\sum x_i d_j)\, u_i$ les d_j étant des opérateurs de dérivation que

$$R_{p_1\dots p_m} = \left| d_1^{op_1} o \dots o\, d_m^{op_m} \; o\; I^{n-\sum p_j} \right| (u_1 \; o \; \dots \; o \; u_n \,|$$

et la formule (T)

$$(v_1 \; o \dots o \; v_n) = \sum x_1^{p_1} \dots x_m^{p_m} \; (d_1^{op_1} o \dots o d_m^{op_m} \; o \; I^{n-\; p_m})\; (u_1,\dots,u_n)$$

reçoit le nom de formule de Taylor.

On peut dire aussi en employant la notation des polarisations

$$R_{p_1\dots p_m} = \binom{1 \dots \; m}{1^{p_1} \dots m^{p_m}} \; (u_1,\dots,u_n)$$

Exemple numérique $n = 3,\ m = 2$.

$$v_1 = x_1 u_1 + x_2 u_1^2,\ v_2 = x_1 u_2^{\,1} + x_2 u_2^{\,2};\ v_3 = x_1 u_3^{\,1} + x_2 u_3^2$$

Le coefficient de $x_1^2 x_2$ dans le 3-mot multilinéaire (v_1,v_2,v_3) est

$$(d_1 o\, d_1 \; o \; d_2)\; (u_1,u_2,u_3) = \binom{1}{1} o \binom{1}{1} o \binom{2}{2}\; (u_1^1,u_2^1,u^2{}_3) = (u_1^1,u_2^1,\, u_3) + \dots$$

$$+ (u_1^{\,1},\, u_2^2,\, u_3^1) + (u_1^2,\, u_2^1,\, u_3^1).$$

.../...

c) Supposons encore comme en (b) que les n-mots de la forme $(u_1,\ldots,u_n)$ soient multilinéaires, les mots u_i appartenant à un R-module ayant m vecteurs de base $e_1,\ldots,e_m$ (R commutatif).

$$u_i = k_i^1\, e_1 + \ldots + k_i^m\, e_m$$

les $k_i^j \in R$.

Dans ces conditions, effectuons le n-mot $(u_{r_1},\ldots,u_{r_n})$, les r_i étant distincts ou non. Ce n mot se présente sous la forme

$$(u_{r_1},\ldots,u_{r_n}) = \sum K_q \quad \binom{r}{q} (e_{r_1},\ldots,e_{r_n})$$

où $\binom{r}{q}$ est la polarisation $\binom{r_1}{q_1} o \ldots o \binom{r_n}{q_n}$ et où K_q est un élément de R.

Exemple.

$$u_1 = k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3$$

$$u_2 = k_1' e_1 + k_2' e_2 + k_3' e_3$$

On a $(u_1,u_1,u_2) = \sum k_1^2 k_1' (e_1,e_1,e_1) + \sum k_1 k_2 k_3' (e_1,e_2,e_3) + (e_2,e_1,e_3) + \ldots$

$$+ \sum k_1^2 k_1' (e_1,e_1,e_2) + \sum k_1 k_2 k_1' ((e_1,e_2,e_1) + (e_2,e_1,e_1)) + \sum k_1 k_2 k_2' (e_1,e_2,e_2)$$

$$+ (e_2,e_1,e_2))$$

Tous les termes qui interviennent dans le développement sont des produits de (e_1,e_1,e_2) par une polarisation, qui figurent avec un même coefficient dans R. Par exemple $\binom{1}{1} o \binom{1}{2} o \binom{2}{3} (e_1,e_1,e_2) = (e_1,e_2,e_3) + (e_2,e_1,e_3)$

4. Dérivation d'un n-mot commutatif monogène.

Soit un n-mot commutatif, monogène et multilinéaire sur un anneau R :

$$U = (u^{k_1} o \ldots o u^{k_n})$$

.../...

Prenons le coefficient de l'indéterminée x, dans le développement de U (u+xI), x étant une indéterminée qu'on adjoint à l'anneau R. Le coefficient de x dans ce développement est appelé dérivée de U, et sera noté DU. Si U et V sont deux n-mots commutatifs monogènes en u, on vérifie les formules usuelles :

$D(U+V) = DU + DV$ $\qquad\qquad$ $Da = 0$ si $a \in R$

$D(U.V) = D\,U.\,V + U.DV$, le signe. désignant le produit symétrisé. On a aussi $D(UoV) = DU\ oV + U\ oDV$.

Il en résulte que $DO = O$ (par suite de la linéarité de D). Mais la réciproque n'est pas vraie, par exemple

$$D(X^2oIoI) = D(XoXoI) = 2(XoIoI)$$

PROPOSITION.

Pour qu'une combinaison linéaire $F(u)$ de n-mots multilinéaires monogènes commutatifs en u ait une dérivée nulle, u ayant une équation caractéristique de degré n dans un corps algébriquement clos, il faut et il suffit que $F(u)$ soit une fonction symétrique des différences des racines de cette équation caractéristique.

On doit avoir en effet $F(u + x\,I) = F(u)$, $\forall\, x$. Or soit $(u-sI)^{on}$ le polynome caractéristique de u ayant pour racines $s_1,\ldots,s_n$ Alors $F(u)$ est une fonction symétrique de $s_1,\ldots,s_n$. L'équation caractéristique de $v = u + xI$ est $(u+(x-s)I)^{on}$ qui a pour racines s_1+x, s_n+x, et si $F(u) = g(s_1,\ldots,s_n)$, on en déduit $g(s_1+x,\ldots,s_n+x) = g(s_1,\ldots,s_n)$, ce qui prouve que g est une fonction symétrique ne dépendant que des différences des racines de l'équation caractéristique.

Remarque.

SERRET (Tome I, p. 461) introduit à priori une indéterminée (ici u) pour calculer le discriminant d'un polynome; en utilisant la dérivée par rapport à u.

.../...

Exemples de dérivées.

a) n-mot élémentaire réduit.

$$\text{Si } p_k = \frac{u^{ok} \circ I^{on-k}}{k!\,(n-k)!} \qquad D\,p_k = \frac{k\,(u^{ok-1} \circ I^{on-k+1})}{k!\,(n-k)!} = (n-k+1)\,p_{k-1}$$

b) n-mot réduit monogène simple.

$$\text{Si } S_k = \frac{(u^k \circ I^{on-1})}{(n-1)!} \qquad DS_k = \frac{k\,(u^{k-1} \circ I^{on-1})}{(n-1)!} = k\,S_{k-1}\ , \text{ si } k \neq 1$$

$$\text{Si } k = 1,\ DS_1 = \frac{I^{on}}{n-1!}\ .$$ La formule reste encore vraie si on pose

$$S_o = n\,|\,I^{on}\,|\,.$$

Remarques I.

De toute identité entre n-mots monogènes commutatifs réduits on en déduit de nouvelles par dérivation.

II. On peut généraliser la notion de dérivation à des n-mots commutatifs non monogènes en introduisant des "dérivations partielles" par rapport aux mots u_i, définies par $D_j\,u_i = \delta_i^j$ (symbole de Kronecker, comme il est classique dans la théorie des polynomes à plusieurs indéterminées.

5. Polarisation des antisymétriseurs.

Soit $(i_1 \wedge \ldots \wedge i_n)$ un antisymétriseur de n indices. La formule de Laplace peut s'interpréter par la notion de polarisation. Désignons par $D^i\,k$, l'opération qui consiste à placer l'indice k dans le i-ème mineur d'un déterminoide, les indices supérieurs restant dans un ordre fixe. Dans ces conditions la formule de Laplace exprime qu'un antisymétriseur est égal à

.../...

l'un quelconque de ses polarisés. $(D^{j_1} o \ldots o D^{j_n})\ (i_1 \wedge \ldots \wedge i_n) = (i_1 \wedge \ldots \wedge i_n)$

Exemple $(D^1 o\ D^1\ o\ D^2)\ (1 \wedge 2 \wedge 3) = \left|\begin{matrix}12\\12\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}12\\23\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}12\\31\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right|$

6. Dérivation extérieure d'un n-mot alterné

Soit un n-mot alterné $(u_1 \wedge \ldots \wedge u_n) = U$. On appelle dérivée extérieure de U, et on désigne par $d\overset{1}{U}$, l'expression

$$d\overset{1}{U} = \sum (-1)^i \left[du_i \right] (u_1 \wedge \ldots \wedge u_{i-1} \wedge u_{i+1} \ldots \wedge u_n), \quad (1)$$

les (du_i) étant des éléments d'un demi-groupe commutatif.

Si on pose $d\,(du_i) = 0$, on déduit immédiatement de la formule (1)

$$d^{\overset{2}{}}\overset{1}{U} = 0.$$

Exemple I

$du_i = 1$. On a la dérivée extérieure simpliciale

II. Les $(u_i \wedge \ldots \wedge u_n)$ sont des composantes d'un n-vecteur antisymétrique dépendant de p variables $x_1, \ldots, x_p$ et $du_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i} = D_i$.

On a par exemple

$$d\ (a_{124}) = D_4(a_{12}) - D_2\ (a_{14}) + D_1\ (a_{24})$$

$$d^2\ (a_{124}) = D_1D_4a_2 - D_2D_4a_1 - D_2D_1a_4 + D_2D_1a_4 + D_1D_2a_4 - D_4D_1a_2 = 0.$$

.../...

E. PRODUIT SYMETRISE DE MATRICES

Une application importante du produit symétrisé est le cas où les mots sont des matrices à éléments dans un anneau commutatif R. Il semble avoir été introduit par STEPHANOS (I880) (Cf MAC DUFFEE, p. 84) et SYLVESTER. Ce paragraphe sera consacré à l'application du produit symétrisé aux matrices.

1. Définitions.

Rappelons qu'une matrice est un élément d'un module sur un anneau commutatif unitaire R, de vecteurs de base e_p^q , p et q étant deux indices. Une matrice se présente sous la forme $A = \sum a_p^q \; e_p^q$, et le R module des matrices devient une algèbre associative par l'introduction de la multiplication associative sur les e_p^q définie par $e_p^q \, e_r^s = \delta_q^r \, e_p^s$ où δ_q^r est le symbole de Kronecker.

Nous considérerons des n-mots multilinéaires dont les éléments sont des matrices $(A_1,\ldots,A_n)$ et nous établirons entre ces n-mots une relation d'équivalence compatible avec le produit symétrisé des n-mots.

On a $(A_1,\ldots,A_n) = \sum k \; (e_{p_1}^{q_1}, \ldots, e_{p_n}^{q_n})$ en vertu de la multilinéarité, où $k \in R$.

Entre les n-mots de la forme $(e_{p_1}^{q_1}, \ldots, e_{p_n}^{q_n})$ nous établissons la relation S définie par

a) $(e_{p_1}^{q_1},\ldots,e_{p_n}^{q_n}) \equiv 0$ s'il existe un couple d'indices tel que l'on ait $p_i = p_j$ ou $q_i = q_j$.

.../...

b) $(e_{p_1}^{q_1}, \ldots, e_{p_n}^{q_n}) \equiv (-1)^{P+Q} (e_{p'_1}^{q'_1}, \ldots, e_{p'_n}^{q'_n})$ si $p'_1, \ldots, p'_n$ est une permutation des indices $p_1, \ldots, p_n$ et P la différence des nombres d'inversions des suites p_i et p'_i et si $q'_1, \ldots, q'_n$ est une permutation des indices $q_1, \ldots, q_n$, Q désignant la différence des nombres d'inversions des suites q_i et q'_i. Il est immédiat que la relation ainsi définie par le signe $\equiv$ est une relation d'équivalence. D'ailleurs le produit symétrisé

$(e_{p_1}^{q_1}, \ldots, e_{p_n}^{q_n})(e_{r_1}^{s_1}, \ldots, e_{r_n}^{s_n})$ ne sera différent de 0 que si les q_i et les r_i sont formés des mêmes indices à l'ordre près, et donne un résultat nul si les q_i ne sont pas distincts, comme on le voit en transposant dans le résultat les deux p_i correspondants.

Exemple :

$$(e_2^1, e_3^1)(e_1^4, e_1^5) = (e_2^4, e_3^5) + (e_3^4, e_2^5) \equiv 0$$

Si on remplace maintenant le n-mot $(e_{p_1}^{q_1}, \ldots, e_{p_n}^{q_n})$ par le n-mot équivalent $(-1)^{P+Q} (e_{p'_1}^{q'_1}, \ldots, e_{p'_n}^{q'_n})$, le produit se compose d'un terme unique qui se déduit du terme unique auquel se réduit le premier par P+Q transpositions d'indices. L'équivalence est donc compatible avec le produit symétrisé à gauche. On verrait de même qu'elle est compatible à droite.

PROPRIETE.

Les n-mots munis de l'équivalence S sont commutatifs. Car une transposition sur les p_i et une transposition sur les q_i conserve le signe de $(e_{p_1}^{q_1}, \ldots, e_{p_n}^{q_n})$.

.../...

Nous représenterons par le symbole $(e_{p_1}^{q_1} o \ldots o e_{p_n}^{q_n})$ la classe d'équivalence dans S du n-mot $(e_{p_1}^{q_1}, \ldots, e_{p_n}^{q_n})$.

Remarque .

Le n-mot $(e_{p_1}^{q_1} o \ldots o e_{p_n}^{q_n})$ est isomorphe au n-mot résultant de $(e_{p_1}^{q_1}, \ldots, e_{p_n}^{q_n})$ par la double antisymétrisation des indices p_i d'une part ,et des indices q_i,d'autre part. On obtient ainsi une classe de n-mots commutatifs parcequ'il y a un nombre pair (ici 2) de séries d'indices (les p_i et les q_j).

Comme autres exemples de tels n-mots ,citons le mineur $\begin{vmatrix} q_1 & \ldots & q_n \\ p_1 & \ldots & p_n \end{vmatrix}$ formé avec les lignes d'indices p_i et les colonnes d'indices q_j d'une matrice A (symbole de Kronecker ,si A est la matrice unité) ; et aussi les déterminants des matrices de la forme $\left(a_i^j\right) = \left(K(x_i, y_j)\right)$ (par exemple les déterminants de SMITH, GRAM, FREDHOLM etc ; cf KOWALEWSKI , p.109 et Chapitres XIV et XVIII)

2. Cas des matrices carrées d'ordre n sur un anneau commutatif R .

Soient n matrices A_i ,carrées d'ordre n ,à éléments dans R . Dans le n-mot multilinéaire $(A_1 o \ldots o A_n)$, on obtient après développement $(A_1 o \ldots o A_n) = \left[A_1 o \ldots o A_n\right](e_1^1 o \ldots o e_n^n)$ $\left[A_1 o \ldots o A_n\right]$ étant un scalaire qu'on peut appeler l'invariant simultané des n matrices A_i (B No 6) .....

On a la formule fondamentale du produit symétrisé

$$(A_1 o \ldots o A_n)(B_1 o \ldots o B_n) = \sum (A_{i_1} B_1 o \ldots o A_{i_n} B_n)$$

.../ ...

étendue à toutes lespermutations $(^{i}1,\ldots,^{i}n)$ des indices $(1,\ldots,n)$ et aussi, puisque R est commutatif $(A_1 o \ldots o A_n)\,(B_1 o \ldots o B_n) = (B_1 o \ldots o B_n)(A_1 o \ldots o A_n)$

PROPRIETE I.

En développant le n-mot multilinéaire $(A_1 o \ldots o A_n)$ de deux manières différentes, on voit que $\left[A_1 o \ldots o A_n\right]$ apparait comme la somme de n! déterminants $D_{i_1 \ldots i_n}\,(-1)^I$ (I nombre d'inversions de $i_1,\ldots,i_n$ en désignant par $D_{i_1 \ldots i_n}$ le déterminant ayant pour première ligne la i_1 ème ligne de A_1, la $i_p$ème ligne de A_p pour p- ème ligne. On obtient le même résultat en opérant par colonnes. Ceci fournit des identités entre somme de déterminants dont les rangées appartiennent à des matrices différentes (cf BEAVER)

Exemple $n = 2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

$$\left[AoA'\right] = (ad'-b'c) - (bc'-a'd) = (ad'-bc') - (b'c-a'd)$$

On obtient des résultats et des interprétations intéressantes, quand certaines des matrices A_i sont égales ou égales à I, ou encore égales à certains e_p^q :

PROPRIETE II. $\left|\left[A^{ok} o I^{on-k}\right]\right|$ est égal à la somme des mineurs diagonaux de A,(trace d'ordre k de A); en particulier $\left|\left[A^{on}\right]\right|$ est le déterminant de A et $\left|\left[A^{on-k} o e_{p_1}^{q_1} o \ldots o e_{p_k}^{q_k}\right]\right|$ est le mineur d'ordre (n-k) formé avec les lignes complémentaires de la suite $p_1,\ldots, p_k$ et les colonnes d'indices complémentaires de la suite $q_1,\ldots,q_k$ $(p_i \neq p_j;\ q_i \neq q_j)$.

Si en particulier k = n-1, on retrouve sous forme de produit symétrisé les éléments de A. La formule de Cayley Hamilton (B, No 2) se réduit à la forme classique pour le cas des matrices :

Exemple $\left[A^2 o e_p^q\right]\left|\left[IoI\right]\right| - \left[Aoe_p^q\right]\left[IoA\right] + \left[Ioe_p^q\right](AoA) = 0$

quels que soient (p,q)

.../...

Conséquence.

Toutes lespropriétés de l'équation caractéristique et des n-mots permutables s'appliquent au cas des matrices.

PROPRIETE III.

Interprétation de A^{ok}. Formule de Binet Cauchy.

Si A est une matrice carrée d'ordre n, A^{ok} peut se mettre sous forme d'une matrice carrée d'ordre C_n^k dont les éléments sont les coefficients des différentes combinaisons $e_{p_1}^{q_1} o \ldots o e_{p_k}^{q_k}$ dans le k-mot A^{ok}, c'est à dire les mineurs d'ordre k de la matrice A. On obtient ainsi la k-ième composée de A. La formule

$$\left| A^{ok} \right| \left| B^{ok} \right| = \left| AB^{ok} \right|$$

qui résulte de la formule du produit symétrisé de n-mots est la formule de Binet Cauchy : tout mineur de AB d'ordre k est une somme de produits de mineurs d'ordre k de A et de B. En particulier le déterminant de AB est le produit des déterminants de A et de B (si k = n).

Ainsi pour n = 3 $\quad A = \sum a_i^j \, e_i^j \quad (i,j = 1,2,3)$

$$AoA = a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1 \; (e_1^1 o e_2^2) + (a_2^1 a_3^2 - a_2^2 a_3^1)(e_2^1 o e_3^2) + \ldots$$

qu'on peut disposer sous forme de matrice carrée d'ordre C_3^2. La formule de Cayley-Hamilton reste vraie pour $k < n$ sous la forme (B,2)

$$\sum (-1)^p C_k^p (A^p o x_1 o \ldots o x_{k-1}) (A^{ok-p} o I^{op}) = 0$$

Les x_i étant des matrices quelconques, mais les coefficients ne sont plus des éléments de R, mais des matrices d'ordre C_n^k.

Exemple.

A étant la matrice carrée d'ordre 3 donnée plus haut, on vérifiera

.../...

la formule $\left[A^2 \circ e_p^q \right]\left[IoI\right] - (Aoe_p^q)\,(IoA) + (Ioe_p^q)\,(AoA) = 0$

avec AoA ayant la valeur indiquée plus haut et

$$IoA = \begin{pmatrix} a_2^2 + a_3^3 & a_2^1 - a_3^1 & \\ a_1^2 & a_3^3 + a_1^1 & a_3^2 \\ -a_1^3 & a_2^3 & a_1^1 + a_2^2 \end{pmatrix}$$

On pourra de même vérifier l'égalité $(IoA)\,(IoA) = (A^2 oI) + (AoA)$.

3. Interprétation géométrique par les endomorphismes d'un espace vectoriel.

Soit M un espace vectoriel sur un corps R, de caractéristique différente de 2, et considérons k endomorphismes de M, $T_1,\ldots,T_k$. Considérons un k-uple de vecteurs de M : $u_1,\ldots,u_k$ et l'élément de $M^{\wedge k}$ (puissance extérieure k-ième de M) défini par $(T_1 \circ\ldots\circ T_k)(u_1,\ldots,u_k)=\sum(T_{i_1} u_1 \wedge\ldots\wedge T_{i_k} u_k)$ étendu aux k! permutations des indices $1,\ldots,k$. Si on prend une base pour M, à l'application T_i correspond la matrice A_i, et au vecteur $(u_1 \wedge\ldots\wedge u_k) \in M^{\wedge k}$ correspond un vecteur $(T_1\circ\ldots\circ T_k)(u_1,\ldots,u_k)$. Donc $T_1\circ\ldots\circ T_k$ est une application de $M^{\wedge k}$ dans lui-même, dont la matrice est par construction $(A_1\circ\ldots\circ A_k)$ (démonstration immédiate).

Si en particulier $T_i = T_j$ $\forall i$ et si $T_i=T$, on retrouve la puissance extérieure k-ème de l'application T, et la matrice A^{ok} est la matrice de cette application : $T^{\wedge k}$.

Généralisation de la notion de vecteur propre.

On peut se proposer étant donné trois applications linéaires T, T', T" de matrices respectives A, A',A" de rechercher les vecteurs pour

../..

lesquels Tu, T'u, T"u ne sont pas linéairement indépendants. On est conduit, à écrire :

$(s,t \in R)$ $Tu - sT'u - tT''u = (T - sT' - tT'')u = 0$, avec $u \neq 0$

L'application $T-sT'-tT''$ n'est donc pas régulière et le déterminant de la matrice correspondante est nul :

$$(A - sA' - tA'')^{03} = 0 \quad (1)$$

On obtient ainsi une cubique dans le plan des (s,t) dont les points généralisent les valeurs propres de l'application T. Tous les coefficients du développement de (1) sont des invariants simultanés de T,T',T".

Exemple.

Apolarité (des endomorphismes) (Cf GRACE and YOUNG, CH. VIII).

Soient $T_1,\ldots,T_{n-1}$, $n-1$ endomorphismes d'un espace vectoriel. Les éndomorphismes T tels que $(T_1 \circ \ldots \circ T_{n-1} \circ T) = 0$ forment un espace vectoriel sur le même corps (ou plus généralement un module sur l'anneau de base l'endomorphisme T sera dit apolaire à $T_1,\ldots,T_{n-1}$.

C'est ainsi que si A et B désignent deux matrices symétriques, (d'ordre 2) la relation $AoB = 0$ signifie que les racines de deux équations du second degré associées aux matrices A et B sont en division harmonique.

De même si A et B sont deux matrices symétriques du troisième ordre, la relation $(AoAoB) = 0$ signifie que la conique de matrice B est harmoniquement circonscrite à la conique de matrice A.

Remarque.

Les racines de l'équation $(T-xI) \circ (T'-xI) \circ (T''-xI)$ sont aussi des invariants simultanés des endomorphismes T, T',T".

.../...

4. Produit symétrisé et matrices transposées.

On appelle transposée ${}^tU$ d'une expression de la forme

$U = \sum a_P^Q \ (e_{p_1}^{q_1} \circ \ldots \circ e_{p_k}^{q_k})$, où $a_P^Q \in R$, l'expression obtenue en échangeant les indices supérieures et les indices inférieurs.

$$\cdot\ {}^tU = a_P^Q \ (e_{q_1}^{p_1} \circ \ldots \circ e_{q_k}^{p_k})$$

PROPRIETE I.

Si $A_1, \ldots, A_k$ sont des matrices, on a

$${}^t(\sum A_i) = \sum({}^tA_i); \quad {}^t(A_1 \ldots A_k) = {}^tA_k \ldots {}^tA_1$$

$${}^t(A_1 \circ \ldots \circ A_k) = ({}^tA_1 \circ {}^tA_2 \ldots \circ {}^tA_k)$$

Les deux premières formules sont élémentaires. Soit $A = \sum a_p^q \ e_p^q$,

$B = \sum b_r^s \ e_r^s$. $A \circ B = \sum (a_p^q b_r^s + a_r^s b_p^q - a_p^s b_r^q - a_r^q b_p^s) (e_p^q \circ e_r^s)$

$(q \neq s, r \neq p)$. On voit alors que ${}^tA \circ {}^tB = \sum a_p^q \ e_q^p \circ \sum b_r^s \ e_s^r$ est ${}^t(A \circ B)$. Même vérification immédiate pour un nombre quelconque de matrices.

En particulier ${}^t(A^{\circ k}) = ({}^tA)^{\circ k}$, pour tout entier k.

Si on appelle mineur diagonal d'une matrice un mineur dont la diagonale principale est un segment de la diagonale principale de la matrice de départ, on a la propriété suivante

PROPRIETE II. Formule de Lagrange généralisée (cf VIVIER, P.24).

Le mineur diagonal de lignes d'indices $(i_1, \ldots, i_k)$ de la matrice $(A\,{}^tA)^{\circ k}$ est la somme des carrés des mineurs d'ordre k de A formés avec les lignes d'indices $(i_1, \ldots, i_k)$.

.../...

Pour k = 1, la propriété est immédiate, car l'élément b_i^i de la matrice $A^tA = a_i^1 \ a_i^1 + \ldots + a_i^n \ a_i^n = \sum (a_i^k)^2$.

Considérons maintenant la matrice $(A^tA)^{ok}$. En vertu de la formule du produit symétrisé (qui s'applique aussi aux matrices rectangulaires)

$$(A^tA \ o \ldots o \ A^tA) = (\overbrace{Ao \ldots oA}^{k}) \ (^tA \ \overbrace{o \ldots o}^{k} \ ^tA)$$

la matrice $(A^tA)^{ok}$ est d'après la propriété I, le produit de deux matrices transposées. Donc son élément diagonal d'indice $i_1, \ldots, i_k$ (qui n'est autre que le mineur diagonal formé avec les lignes et les colonnes de A^tA d'indices $i_1, \ldots, i_k$) est d'après le cas k = 1 la somme des carrés des éléments de la ligne d'indice $(i_1, \ldots, i_k)$ de la matrice A^{ok}, c'est à dire la somme des carrés des mineurs d'ordre k de A formés avec les lignes d'indices $i_1, \ldots, i_k$.

Remarque.

Si R est le corps des complexes les Propriétés I et II se généralisent immédiatement si ^tU désigne la transposée conjuguée de U (en remplaçant a_P^Q , par $\bar{a}_Q^P$) à condition de remplacer le carré d'un élément de R a^2 par $a\bar{a}$).

Nous nous bornerons dans la suite au cas correspondant à la théorie des matrices symétriques à coefficients réels, le cas hermitien s'en déduisant par ce léger changement.

PROPRIETE III.

Si A est une matrice carrée d'ordre n, la somme des carrés des mineurs d'ordre k de A est $(I^{on-k} \ o(A^tA)^{ok})$

../...

D'après la théorie de l'équation caractéristique, B désignant une matrice quelconque, carrée d'ordre n, $(I^{on-k}\ {}_{o}B^{ok})$ est la somme des mineurs diagonaux d'ordre k de B. Si $B = A^{t}A$, cette somme est égale à la somme des carrés de tous les mineurs d'ordre k de A.

Corollaire.

Si A est à coefficients réels tous les mineurs diagonaux de $A^{t}A$ sont positifs ou nuls. (Cf par exemple KOWALEWSKI, p. II5 et ss).

PROPRIETE IV.

Les valeurs propres d'une matrice symétrique à coefficients réels sont réelles.

De l'égalité $(A+xI_n)\ (A-xI_n) = (A^2 - xI_n^2)$, on tire si $A = {}^{t}A$ que x étant une racine de $(A-x\ I_n)^{on}$, x^2 est racine de $(A^{t}A-y\ I_n)^{on}$.

Si x est imaginaire pur, y est positif:- $y = b^2$ et par suite, d'après la propriété III, tous les termes du développement de $(A^{t}A + b^{2}I_n)^{on}$ sont positifs ou nuls. x ne peut donc être imaginaire pur. Si maintenant $x = a+bi$, la matrice symétrique à coefficients réels $- aI_n$ admettrait la valeur propre imaginaire pure bi, contrairement à ce qu'on vient de démontrer. On a donc $b = 0$.

Remarque.

La matrice $A^{t}A$ est toujours symétrique, quel que soit A. Si A est à coefficients réels $A^{t}A$ a donc des valeurs propres réelles, et le même raisonnement prouve que toutes les valeurs propres de $A^{t}A$ sont positives ou nulles.

PROPRIETE V.

Rang d'une matrice symétrique (Cf Aitken p.92).

Si dans une matrice symétrique (ou hermitienne) un mineur diagonal d'ordre r non nul est tel que tous les mineurs diagonaux d'ordre r + 1 et r+2 le bordant sont nuls, le rang de la matrice est r.

.../...

Soit $\begin{vmatrix} 1 \dots r \\ 1 \dots r \end{vmatrix}$ un mineur non nul de la matrice symétrique A, diagonal.

De l'identité de Laplace, on déduit comme (CH.II, C,No 6)

$$\begin{vmatrix} 1 \dots r \\ 1 \dots r \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \dots r\ r+1\ r+2 \\ 1 \dots r\ r+1\ r+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 \dots r\ r+1 \\ 1 \dots r\ r+1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \dots r\ r+2 \\ 1 \dots r\ r+2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \dots r\ r+1 \\ 1 \dots r\ r+2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \dots r\ r+2 \\ 1 \dots r\ r+1 \end{vmatrix}$$

Par hypothèse le deuxième facteur du premier membre et le premier terme du second membre sont nuls. Il en est donc de même du second terme qui en vertu de la symétrie de A est le carré de $\begin{vmatrix} 1 \dots r\ r+1 \\ 1 \dots r\ r+2 \end{vmatrix}$. Tout mineur bordant $\begin{vmatrix} 1 \dots r \\ 1 \dots r \end{vmatrix}$ est donc nul, et par suite $\begin{vmatrix} 1 \dots r \\ 1 \dots r \end{vmatrix}$ peut être pris comme déterminant principal de A, d'après le théorème des mineurs réguliers (CH II C No 6).

PROPRIETE VI.

Une matrice A symétrique à coefficients réels est de rang r, si et seulement si $(A^{on}) = D\,(A^{on}) = \dots D^{n-r+1}\,(A^{on}) = 0$

$$D^{n-r}\,(A^{on}) \neq 0.$$

Dans cette formule $D\,(A^{on})$ désigne la dérivée de A^{on} par rapport à A (D N° 4)

$$D\,(A^{on}) = n\,(A^{on-1} \circ I)$$: d'est la somme des mineurs d'ordre n-1 diagonaux de A. On peut aussi énoncer la propriété sous la forme VI'. Pour qu'unematrice symétrique à coefficients réels soit de rang r, il faut et il suffit que son équation caractéristique ait n-r racines nulles.

La démonstration peut se faire comme suit : si A est une matrice carrée d'ordre n quelconque, l'équation caractéristique de A^2 est l'équation aux carrés des racines de l'équation caractéristique de A (CH III,B,9), et

.../...

et on vérifie immédiatement que si A a pour équation caractéristique

$$x^n - a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots (-1)^n a_n = 0 \quad (1)$$

et A^2 pour équation $y^n - b_1 y^{n-1} + \ldots + (-1)^n b_n = 0$, la nullité de $a_{k+1}, \ldots, a_n$ entraîne la nullité de $b_{k+1}, \ldots, b_n$ (2) (Si (1) a k racines nulles, l'équation aux carrés a aussi k racines nulles comme on le voit en l'écrivant sous la forme $\prod (y - x_i^2) = 0$)

Or on a $b_k = (I^{cr-k} \circ (A^2)^{ok})$, et si A est symétrique à coefficients réels $A^2 = A\ {}^t A$, Alors b_k représente la somme des carrés des mineurs d'ordre k de A (Propriété III). La nullité de $b_{k+1}, \ldots, b_n$ entraîne donc dans ce cas la nullité de tous les mineurs de A d'ordre $\geq k+1$.

Exemple. Pour n = 3 $(A^2 \circ A^2 \circ A^2) = (A \circ A \circ A)^2$

$$(I \circ A^2 \circ A^2) = |IoAoA|^2 - |AoAoA|\ |IoIoA|$$

$$|IoIoA^2| = |IoIoA|^2 - 2\,|AoAoA|$$

Corollaire.

Si A désigne une matrice symétrique à coefficients réels, et si l'équation caractéristique de A admet s pour racines d'ordre p, la matrice A-sI est de rang n-p.

Car si s est racine d'ordre p de l'équation caractéristique de A, O est racine d'ordre p de l'équation caractéristique de la matrice symétrique à coefficients réels A-sI (puisque s est réel Pté IV).

Ce corollaire montre qu'une application linéaire dont la matrice est une matrice symétrique à coefficients réels possède toujours une base de vecteurs propres.

Remarque.

De ces théorèmes, on peut déduire de manière classique (Cf par exemple KOWAKEWSKI p. 257) le théorème d'Hadamard donnant la borne supérieure du module d'un déterminant à éléments complexes.

.../...

5. Matrices symétriques gauches à coefficients réels.

Une matrice est symétrique gauche si $A = -{}^tA$.

PROPRIETE I.

Dans un corps de caractéristique différente de 2, si A est symétrique gauche $A^{o2p+1} = 0$. (p entier positif)

Car $A^{o2p+1} = ({}^tA)^{o2p+1} = -A^{o2p+1}$ (4 propriété I).

En particulier le déterminant d'une matrice symétrique gauche d'ordre impair est nul.

PROPRIETE II.

Les racines caractéristiques d'une matrice symétrique gauche sont imaginaires pures.

On a vu (4, Propriété IV) que $A\,{}^tA$ a des racines caractéristiques positives ou nulles. Si A est symétrique gauche $A\,{}^tA = -A^2$ a des racines positives ou nulles $s_1,\ldots,s_n$. Donc A^2 admet pour racines $-s_1,\ldots,-s_n$ et A les racines $i\sqrt{s_p}$ (B, No 9).

Le raisonnement de la Propriété IV du No 4 se généralise immédiatement aux matrices symétriques gauches (à un changement de signe près). On a donc :

PROPRIETE III.

Si une matrice symétrique gauche est de rang r, elle possède un mineur diagonal d'ordre r non nul, qui peut être pris comme mineur principal.

6. Applications du théorème de Binet Cauchy.

a) Le théorème de Binet Cauchy sur le produit de deux matrices n'est autre que la traduction de la formule $(AB)^{ok} = (A^{ok})\,(B^{ok})$. Il permet de manière classique (cf par exemple AITKEN) de retrouver les propriétés de la matrice inverse d'une matrice carrée, et de retrouver les propriétés des mineurs de A^{ok} dûes à Jacobi. Il s'applique chaque fois qu'on a pu définir

.../...

une opération o, commutative entre couples d'indices, distributive par rapport à l'addition.

Ainsi on peut prendre des matrices dont les éléments sont de la forme

$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} o \ldots o \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}$, les p_i et les q_i étant des indices distincts ou non.

On obtient alors (en multipliant à droite par le symétriseur des p_i égaux, et à gauche par le symétriseur des q_j égaux) de nouvelles démonstrations d'identités dans l'algèbre du groupe symétrique :

Exemple.

Soit la matrice

$$\begin{pmatrix} \binom{1}{1} \binom{2}{1} \binom{3}{1} \\ \binom{1}{2} \binom{2}{2} \binom{3}{2} \\ \binom{1}{3} \quad o \quad \binom{2}{3} \end{pmatrix} = W$$

La matrice des cofacteurs $W' = W^{-1}\ D(W)$ est égale à, en désignant par D (W) le déterminant de W :

$$W = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} o \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} - \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} o \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 23 \\ 12 \end{matrix} \\ -\left|\begin{matrix} 13 \\ 23 \end{matrix}\right| & \begin{matrix} 13 \\ 13 \end{matrix} & -\left|\begin{matrix} 13 \\ 12 \end{matrix}\right| \\ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} o \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} - \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} o \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} & \left|\begin{matrix} 12 \\ 12 \end{matrix}\right| \end{pmatrix}$$

On a par exemple $\binom{1}{1}\ D(W)^2 = \left|\begin{matrix} 13 \\ 13 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} 12 \\ 12 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} 13 \\ 12 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} o \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right|$

Car la matrice (W')' des cofacteurs de W' est telle que $(W')' = D^2(W).\ W.$

.../...

Exemple II.

Théorème de Francke sur les antisymétriseurs composés.

Soient n indices (1, 2,..., n) et soit $U = (a_1 \bar{\wedge} a_2 \bar{\wedge} \ldots \bar{\wedge} a_k)$ un antisymétriseur composé, chacun des a_i contenant h indices (CH II B No).

A l'antisymétriseur composé U nous associerons deux antisymétriseurs composés CU et C'U définis de la manière suivante.

1) Pour former l'antisymétriseur composé CU, on forme l'antisymétriseur composé des $C_n^h - k$ combinaisons des indices (1,...,n) qui ne figurent pas parmi les a_i , de telle mahière que si on écrit les indices figurant dans chaque a_i dans l'ordre naturel, et que si on classe ensuite les combinaisons h à h des indices (1,...,n) dans l'ordre lexicographique, l'antisymétriseur composé $U \bar{\wedge} CU$ présente un nombre pair d'inversions.

On a alors évidemment $C^2 U = C(CU) = U(-1)^k (C_n^h - k)$

2) Pour former l'antisymétriseur composé C'U, on formera l'antisymétriseur $C'U = (C'a_1 \bar{\wedge} \ldots \bar{\wedge} C'a_k)$ en désignant par $C'a_i$ l'antisymétriseur formé par les indices (1,...,n) ne figurant pas dans a_i , de telle manière que la suite des indices figurant dans $(a_i, C'a_i)$ soit une permutation paire de (1,2,...,n). On voit immédiatement que

$$C'^2 U = (-1)^{h(n-h)} U.$$

3) Formons maintenant CC'U et C'CU. L'antisymétriseur composé CC'U est formé des $C_n^h - k$ combinaisons n-h à n-h des indices 1,..., n ne figurant pas parmi les $C'a_i$. L'antisymétriseur composé C'CU contient les mêmes combinaisons n-h à n-h des indices (1,...,n). Donc CC'U et C'CU sont égaux au signe près.

Soit une matrice carrée A d'ordre n régulière. $A^{oh} = B$ est une matrice carrée régulière d'ordre C_n^h dont les éléments sont les mineurs d'ordre h de A, où l'on peut supposer les éléments écrits sous la forme A_a^b , si a et b sont des combinaisons h à h des indices (1,...,n) chaque combinaison ayant ses chiffres écrits dans l'ordre naturel, et les combinaisons étant classées

dans l'ordre lexicographique croissant.

La matrice $B^{ok} = B'$ dont les éléments sont les mineurs d'ordre k de B, aura des éléments qui seront des " mineurs composés" de A, et les éléments de B' pourront se mettre sous la forme $A\begin{matrix} V \\ U \end{matrix}$, où U et V ont la forme d'antisymétriseurs composés, comme il est indiqué au début du paragraphe.

A la matrice $B' = B^{ok}$, nous ferons alors correspondre deux matrices :

a) la matrice CB' aura des éléments de la forme $A\begin{matrix} CU \\ CV \end{matrix}$

b) la matrice C'B' aura des éléments de la forme $A\begin{matrix} C'U \\ C'V \end{matrix}$.

La matrice CB' est par construction même la matrice transposée de la matrice des mineurs complémentaires dans B de ceux qui forment B'. Le pròduit B'. CB' est donc une matrice diagonale d'ordre C_N^k (avec $N = C_n^h$), dont les éléments sont égaux à D (B), ceci d'après la formule de Laplace appliquée à B.

On a donc $B'.CB' = D\ (B)\quad I_{C_N^k}$ (1)

La matrice C'B' est formée de mineurs d'ordre k de C'B, matrice dont les éléments sont les mineurs d'ordre n-h de A. On a donc $C'\ (B^{ok}) = (C'B)^{ok}$

Mais d'ailleurs $B.\ C'B = D\ (A)\ I_{C_n^h}$, d'après la formule de Laplace appliquée à A. D'où l'on tire d'après la formule de Binet Cauchy :

$$B'.\ C'B' = B^{ok}.\ (C'B)^{ok} = D\ (A)^k \quad I_{C_N^k} \qquad (2)$$

En comparant (1) et (2), et en remplaçant D (B) par sa valeur donnée par le théorème de Sylvester-Francke (CH II C No 5 Exemple II), il vient

$$C'\ B' = CB'\ \frac{D\ (B)}{D(A)^k}\ .$$

ou enfin $C'B' = CB' \left[D\ (A)\right]^{C_{n-1}^{h-1} - k}$ (3)

.../...

En multipliant les deux membres par C' ou C, on trouve qu'à un facteur numérique près (puissance du déterminant D(A), B' est égal à CC'B' ou C'CB'.

Le résultat précédent est le théorème de Francke (I862) (Cf Turnbull Formule IV, p. I08). Il contient à son tour comme cas particulier le théorème de Sylvester Francke, et le théorème des extensionnels.

Remarque.

Ce théorème permet de donner des formules sur les antisymétriseurs composés (Ch II,C,No 4); on peut d'ailleurs prendrepour n une valeur quelconque supérieure au nombre des indices non équivalents : en représentant par un même symbole des indices équivalents à droite et à gauche, on a par exemple (n = 4)

$$C\,(14 \barwedge 23 \barwedge 24 \barwedge 34) = 12 \barwedge 13$$

$$C'(14 \barwedge 23 \barwedge 24 \barwedge 34) = 23 \barwedge 14 \barwedge 13 \barwedge 12$$

d'où $(12 \barwedge 13)\ (1234) = 23 \barwedge 14 \barwedge 13 \barwedge 12$

Mais pour n = 3, on a aussi

$$12 \barwedge 13 = 1\ (123)$$

D'où $23 \barwedge 14 \barwedge 13 \barwedge 12 = 1\ (123)\ (1234)$

(Ch.II, C, Exemple V).

GENERALISATION.

Nous dirons que deux matrices A et B sont équivalentes et nous poserons $A \backsim B$ si leurs éléments sont proportionnels.

Dans ces conditions considérons deux suites d'entiers

$(p_1, p_2, \ldots p_m)$ et $(n_1, \ldots, n_m)$ telles que

$$n_{i+1} = C_{n_i}^{p_i}$$

Alors la matrice

$$\left(\left(A^{op_1} \right)^{op_2} \ldots\ldots \right)^{op_n}$$

est équivalente aux matrices obtenues en remplaçant p_i et p_{i+1} par p'_i et p'_{i+1} avec

$$p_i + p'_i = n_i \quad , \ \forall_i$$

.../...

Produit symétrisé généralisé de matrices.

Entre les n-mots $(e_{p_1}^{q_1}, \ldots, e_{p_n}^{q_n})$, nous établirons la relation d'équivalence R', évidemment compatible avec le produit symétrisé, que deux n-mots sont équivalents s'ils se déduisent l'un de l'autre par une permutation quelconque des e_p^q. Autrement dit nous considérons les n-mots commutatifs $(e_{p_1}^{q_1} \circ \ldots \circ e_{p_n}^{q_n})$, en employant la même notation qu'au No 1, quoiqu'on n'ait pas la même relation d'équivalence.

La plupart des propriétés relatives à la relation R s'étendent à la relation R', notamment la formule fondamentale

$$(A_1 \circ \ldots \circ A_n)\,(B_1 \circ \ldots \circ B_n) = \sum (A_{i_1} B_1 \circ \ldots \circ A_{i_n} B_n).$$

qui a comme conséquence le théorème de Binet Cauchy. (conséquence du fait que R' est compatible avec le produit symétrisé).

Exemple $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\qquad A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

$$AA' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

$$A \circ A = ab\,(e_1^1 \circ e_1^2) + ac(e_1^1 \circ e_2^1) + \ldots\ldots + bd\,(e_2^2 \circ e_2^2)$$

On a $\left| A \circ A \right| \left| A' \circ A' \right| = \left| (AA' \circ AA') \right|$.

.../...

8. Mineurs mixtes par lignes et mineurs mixtes par colonnes.

Revenons aux notations du No 1. Entre n-uples de couples $(e_{p_1}^{q_1}, \ldots, e_{p_n}^{q_n})$, on peut établir d'autres relations d'équivalence que celle qui a été définie (par exemple celle du No 7). Dans ce paragraphe, nous supposerons que les n-mots sont multilinéaires et nous considérerons entre n-uples les deux relations R_i et R_s définies de la manière suivante :

R_i $(e_{p_1}^{q_1}, \ldots, e_{p_n}^{q_n}) \equiv 0$ s'il existe des indices i,j tels que $p_i = p_j$

$(e_{p_1}^{q_1}, \ldots, e_{p_n}^{q_n}) \equiv (e_{p_1}^{q_1}, \ldots, e_{p_n}^{q_n})\,(-1)^I$, si $p'_1, \ldots, p'_n$ est une permutation des indices $p_1, \ldots, p_n$ et I désignant le nombre d'inversions de la permutation s définie par $sp_i = p'_i$.

R_i est évidemment une relation d'équivalence entre n-uples de couples (e_p^q). Les classes d'équivalence que nous désignerons par la notation $(e_{p_1}^{q_1} \ldots e_{p_n}^{q_n})$ s'obtiennent à partir du n-mot $(e_{p_1}^{q_1}, \ldots, e_{p_n}^{q_n})$ par antisymétrisation des indices inférieurs.

La relation R_s se définit d'une manière analogue, en antisymétrisant par rapport aux indices supérieurs q_i. Nous représenterons les classes d'équivalence R_s par $(e_{p_1}^{q_1} \cdots e_{p_n}^{q_n})$.

La relation d'équivalence R du No 1 est l'intersection des relations d'équivalence R_i et R_s.

Soit n matrices telles que $A_i = \sum a_{ip}^q \; e_p^q$ où $a_{ip}^q \in R$, anneau

../..

commutatif, on voit immédiatement par multilinéarité des n-mots que

$$A_1 \cdot A_2 \cdots A_n = \sum A_{i\,p_1}^{q_1} \cdots {}_{p_n}^{q_n} \quad (e_{p_1}^{q_1} \underline{\cdots} e_{p_n}^{q_n})$$

où le coefficient $A_{i\,p_1}^{q_1 \cdots\, q_n} \cdots {}_{p_n}$ est le déterminant formé avec la q_1 ème colonne de A_1 , la q_2 ème colonne de A_2,..., la q_n ème colonne de A_n les éléments étant pris dans les lignes d'indices p_1,..., p_n de chacune des matrices. (les p_i sont forcément distincts, mais les q_i constituent un arrangement à répétition des indices 1,2,... m. Nous dirons que ce coefficient est un mineur mixte par lignes des matrices A_j.

On aura de même

$$(A_1 \underline{\quad} A_2 \underline{\quad} \cdots \underline{\quad} A_n) = \sum A^{s}_{\substack{q_1 \cdots q_n \\ p_1 \cdots p_n}} \quad (e_{p_1}^{q_1} \underline{\quad} \cdots \underline{\quad} e_{p_n}^{q_n})$$

où le coefficient $A^{s}_{p_1}{}^{q_1} \cdots {}_{p_n}^{q_n}$ est le déterminant formé avec les colonnes q_j de la matrice A_j et les lignes d'indices p_1,..., p_n.

Sur les mineurs mixtes par lignes et par colonnes de n matrices, on a les propriétés suivantes :

PROPRIETE I.

Etant donné n matrices, on a

$$(A_1 \circ \cdots \circ A_n) = \sum A_{i\,p_1}^{q_1} \cdots {}_{p_n}^{q_n} \quad (e_{p_1}^{q_1} \circ \cdots \circ e_{p_n}^{q_n})$$

$$= \sum A_{s\,p_1}^{q_1} \cdots {}_{p_n}^{q_n} \quad (e_{p_1}^{q_1} \circ \cdots \circ e_{p_n}^{q_n})$$

sommation étendue à toutes les combinaisons n à n des indices p_i et q_j.

.../...

Car $e^{q_1}_{p_1} \circ \ldots \circ e^{q_n}_{p_n} = (p_1 \wedge \ldots \wedge p_n)\,(e^{q_1}_{p_1} \overline{\cdots} e^{q_n}_{p_n})$. Le n-mot commutatif $e^{q_1}_{p_1} \circ \ldots \circ e^{q_n}_{p_n}$ résulte donc du n-mot $e^{q_1}_{p_1} \overline{\cdots} e^{q_n}_{p_n}$ par antisymétrisation des indices inférieurs. On en déduit par multilinéarité la deuxième relation. La première s'obtient en antisymétrisant les indices supérieurs q_i (C'est aussi la Propriété I du No 2).

PROPRIETE II

Si on définit $(e^{q_1}_{p_1} \underline{\cdots} e^{q_n}_{p_n})\,(e^{q'_1}_{p'_1} \overline{\cdots} e^{q'_n}_{p'_n}) = P$ par le produit symétrisé des couples relativement au groupe formé par la permutation unité, on a

$$P = (p_1 \wedge \ldots \wedge p_n)\,(q'_1 \wedge \ldots \wedge q'_n)\,(e^{q_1}_{p_1}\, e^{q'_1}_{p'_1}, \ldots, e^{q_n}_{p_n}\, e^{q'_n}_{p'_n})$$

on en déduit $P = 0$ si $q_i \neq p'_i$ pour un certain i, et

$$P = (e^{q'_1}_{p_1} \circ \ldots \circ e^{q'_n}_{p_n}) \text{ si } q_i = p'_i \text{ pour tout i.}$$

Avec cette définition, on a la formule déduite par multilinéarité, si A_i et B_j sont deux matrices quelconques

$$(2) \qquad (A_1 \underline{\cdots} A_n)\,(B_1 \overline{\cdots} B_n) = (A_1 B_1 \circ \ldots \circ A_n B_n)$$

PROPRIETE III.

On a les formules

$$(B_1 \circ \ldots \circ B_n)\,(\underline{A_1 . A_2 \ldots A_n}) = \sum (\underline{B_{i_1} A_1 \ldots B_{i_n} A_n}) \qquad (III,1)$$

$$(A_1 \overline{\cdots} A_n)\,(B_1 \circ \ldots \circ B_n) = \sum (\overline{A_1 B_{i_1} \ldots A_n B_{i_n}}) \qquad (III,2)$$

La sommation étant étendue à toutes les permutations $i_1, \ldots, i_n$ des indices $1 \ldots n$.

../..

Partons de la formule $(e_{p_1}^{q_1} \underline{\quad\quad} e_{p_n}^{q_n})\,(e_{r_1}^{s_1} \underline{\quad\quad} e_{r_n}^{s_n}) = P.$

$P = 0$, si la suite des indices q_i à l'ordre près diffère de celle des indices r_i. Si la suite des q_i coincide avec celle des r_i à l'ordre près et si les facteurs ne sont pas nuls, on aura

$$P = \sum \underline{(e_{p_1}^{q_{i_1}} e_{r_{j_1}}^{s_1}, \ldots, e_{p_n}^{q_{i_n}} e_{r_{j_n}}^{s_n})}$$

étendue à toutes les permutations i_1, i_n des indices $1, \ldots, n$.

Par multilinéarité, on en déduit

En désignant par $(AX)_p^s$ le coefficient de e_p^s dans AX, la formule

$$(III,3) \qquad (A_1 \underline{\quad\quad} A_n)\,(X_1 \ldots X_n) = \sum (A_1 X_1)_{p_1}^{s_1} \ldots (A_n X_n)_{p_n}^{s_n} (e_{p_1}^{s_1}, \ldots, e_{p_n}^{s_n})$$

En antisymétrisant les matrices $A_1, \ldots, A_n$ et les indices inférieurs $p_1, \ldots, p_n$, on obtient la formule (III,1). En antisymétrisant $X_1, \ldots, X_n$ et les indices supérieurs $s_1, \ldots, s_n$, on obtient la formule (III,2). En faisant les deux antisymétrisations, on retrouve la formule du produit symétrisé de deux matrices (No 2).

Conséquences des formules (III. 1) et (III.2).

a) Les formules III,1 et III,2 sont analogues à celles du produit symétrisé. La formule III,1 par exemple donne leproduit d'un n-mot commutatif par un n-mot alterné. On en déduit les conséquences déjà établies, par exemple une formule de Cayley Hamilton. Si I désigne la matrice unité, A une matrice carrée du deuxième ordre et (A.B) ij le mineur mixte par lignes formé avec les colonnes i de A et j de B, on a par exemple :

.../...

$$(AoI)\ (A.I)_{ij} = (A.A)_{ij} + (A^2.I)_{ij}$$

$$(A^2oI)_{ij} = (IoI)\ (A^2.I)_{ij}$$

ce qui redonne la formule de Cayley Hamilton $(A.I)_{ij}$ étant l'élément de A qui figure dans la i-ème colonne de A et dans la ligne qui n'est pas j. On étend aisément au cas général.

b) Si B_1, B_n sont des matrices carrées d'ordre n, la formule III,1 montre que les mineurs mixtes par lignes de $\Sigma B_{i_1} A_1 o \ldots oB_{i_n} A_n)$ sont proportionnels aux mineurs mixtes par lignes de $A_1, \ldots, A_n$ le coefficient de proportionnalité étant $(B_1 o \ldots oB_n)$. Si tous les B_i sont égaux à B, un mineur mixte par ligne de $BA_1, \ldots, BA_n$ est le mineur mixte correspondant de $A_1, \ldots, A_n$ multiplié par le déterminant de B.

Il en résulte que si les éléments des matrices A_i et B_j appartiennent à un anneau principal on a la

PROPRIETE IV.

Le PGCD des mineurs mixtes par lignes de matrices A_i dans un anneau principal est invariant si on multiplie à gauche les A_i par une même matrice B unimodulaire, ou si on multiplie à droite les matrices A_i par des matrices B_i unimodulaires.

La première partie résulte de ce que chaque mineur mixte n'est pas changé par multiplication à gauche par une matrice unimodulaire.

La deuxième partie résulte de la formule

$$(IV)\quad (A_1B \cdot A_2B \ldots A_nB)_{k_1, \ldots k_n} = \sum b^{k_1}_{i_1} \ldots b^{k_n}_{i_n} \quad (A_1 \ldots A_n)_{i_1 \ldots i_n}$$

où b^q_p est l'élément de la p ème ligne et de la q ème colonne de la matrice B et $(A_1 \ldots A_n)_{i_1 \ldots i_n}$ désigne le mineur mixte par lignes formé avec la colonne i_1 de A_1, i_p de A_p. Cette formule se démontre immédiatement par application de la définition des mineurs mixtes.

../..

9. Mineurs mixtes de matrices deux à deux permutables.

PROPRIETE I.

Si A et B sont deux matrices carrées permutables (AB = BA) tout mineur mixte par lignes de A et B est égal à un mineur mixte par colonnes de A et B.

Soit $(A_{i_1},\dots,A_{i_k}, B_{j_1},\dots,B_{j_{k'}})$ le mineur mixte par lignes de A et B formé avec les lignes de A d'indices $i_1,\dots, i_k$ et de B d'indices $j_1,\dots,j_{k'}$ $(k+k' = n)$. Développons ce déterminant D d'ordre n par une formule de Laplace suivant les lignes (les k premières et les k' dernières. Il vient

$$D = \sum A^{p_1 \cdots p_k}_{i_1 \cdots i_k} \; B^{q_1 \cdots q_{k'}}_{j_1 \cdots j_{k'}}$$

somme étendue à toutes les combinaisons $p_1,\dots,p_k$ k à k des indices $1,\dots,n$ et aux combinaisons complémentaires $q_1,\dots,q_{k'}$ la suite desindices p et q ne présentant pas d'inversion.

Mais si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n permutables il est immédiat d'après le théorème de Binet et Cauchy que A^{ok} est permutable avec B^{ok} et avec la transposée de $B^{on-k} = ({}^tB)^{ok'}$, à condition d'écrire l'élément $B^{j_1\cdots j_{k'}}_{q_1\cdots q_{k'}}$ sous la forme $C^{j'_1\cdots j'_k}_{p_1\cdots p_k}$

la suite des j' étant complémentaire de la suite des j, et l'ensemble des indices j et j' ayant un nombre pair d'inversions.

C étant la matrice $({}^tB)^{ok'}$ écrite sous cette forme, on voit que D est le terme occupant la ligne $i_1,\dots,i_k$ et la colonne j'_1, j'_k dans le produit $A^{ok}\,C$. Mais comme $A^{ok}C = C\,A^{ok}$, on en déduit

$$D = \sum C^{p_1\cdots p_k}_{i_1 \quad i_k} \; A^{j'_1 \cdots j'_k}_{q_1 \cdots q_k} = \sum B^{i'_1 \cdots i'_{k'}}_{p'_1 \quad p'_{k'}} \; A^{j'_1 \cdots j'_k}_{q_1 \,,\cdots\, q_k}$$

les suites i' et p' étant les complémentaires des suites i et p. On reconnaît dans le dernier développement un mineur mixte par colonnes de B et de A.

.../...

On a donc

$$(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}, B_{j_1}, \ldots, B_{j_{k'}}) = (B^{i'_1}, \ldots, B^{i'_{k'}}, A^{j'_1}, \ldots, A^{j'_k}).$$

Conséquence.

Le déterminant composé $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$ où A, B, A', B' sont des matrices carrées de même ordre, et où A' et B' sont permutables est le déterminant de la matrice AB' - BA'.

Car le déterminant composé est égal d'après la formule de Laplace à $\sum (AB)^{EF} (A'B')^{\bar{E}\bar{F}}$ où $(AB)^{E\,F}$ est le mineur mixte par colonnes de A et B formé avec l'ensemble de colonnes de A indéxé par E, et de B indexé par F, $\bar{E}$ et $\bar{F}$ étant les ensembles complémentaires de manière que la permutation totale E F $\bar{E}$ $\bar{F}$ soit paire (en prenant 2n indices si les matrices sont d'ordre n).

On a d'ailleurs $\left| (AB'-BA')^{on} \right| = \sum_k \left| (AB'^{ok} \circ (BA')^{on-k} \right|$ d'après la formule du produit symétrisé pour les n-mots réduits, l'indice k variant de 0 à n.

Mais, d'après la Propriété II du No 8

$$\sum_k (AB'^{\,ok}\, BA'^{\,on-k}) = \sum (AB)^{EF} (B'A')_{EF} \quad ,$$

en désignant par $(B'A')_{EF}$ le mineur mixte par lignes formé avec les lignes de B' d'indices E et de A' d'indice F. De $(B'A')_{EF} = (A'B')^{\bar{E}\bar{F}}$, on déduit la relation cherchée.

Par récurrence, on peut démontrer plus généralement (Bourbaki CH VIII) p.140 la proposition suivante :

PROPRIETE II.

Soient n^2 matrices M_i^j $(1 \leq i < n;\ 1 \leq j \leq n)$ carrées d'ordre m et la matrice M carrée d'ordre mn, formée des n^2 blocs M_i^j.

.../...

Si les M_i^j sont permutables deux à deux, le déterminant de M peut se calculer comme le déterminant de la matrice carrée d'ordre m :

$D' = \sum (-1)^I M_1^{i_1} \ldots M_n^{i_n}$ sommation étendue à toutes lespermutations

$i_1, \ldots, i_n$ des indices $1, \ldots, n$, le nombre I étant le nombre d'inversions de chaque permutation.

Rappelons le principe de la démonstration de Bourbaki :
soit M'^i_j la matrice carrée d'ordre m, cofacteur de M_i^j dans le développement de D'. On effectue le produit UM par blocs, avec

$$U = \begin{vmatrix} M'^1_1 & & M'^n_1 \\ 0 & I_m & 0.0 \\ & & \\ 0 \ldots\ldots & 0 & I_m \end{vmatrix}$$

où I_m désigne la matrice carrée unité d'ordre m. Il vient alors

$$UM = \begin{vmatrix} D' & 0 \ldots\ldots & 0 \\ M_2^1 & M_2^2 \ldots\ldots & M_2^n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ M_n^1 & \ldots\ldots & M_n^n \end{vmatrix}$$

et Det (U) Det (M) = Det (D') Det (U)

par suite de l'hypothèse de récurrence.
Si Det (U) $\neq$ 0 (hypothèse dont on peut s'affranchir), on obtient :
Det (M) = Det (D').

Remarque.

La démonstration et le résultat sont encore valables, si les

matrices M_i^j sont permutables pour $i \neq 2$, les matrices M_1^j étant quelconques.

Conséquence.

Considérons la matrice M' formé de n^2 blocs qui sont les M'^j_i en supposant les M_i^j deux à deux permutables.

Le produit $MM' = V = \begin{pmatrix} D' & & \\ & D' & \\ & & D' \end{pmatrix}$ se présente sous forme d'une matrice formée de n blocs égaux à D' disposés suivant la diagonale principale. On en conclut que $M' = M'^{-1}V = \dfrac{\text{Adj } (M).V}{\det M}$, en désignant par

Adj M la matrice des coefacteurs des éléments de M.

Or un mineur d'ordre m de la matrice adjointe d'une matrice donnée M est égal au mineur complémentaire dans M multiplié par la puissance (m-1) eme du déterminant de M (Identité de Jacobi Cauchy, cas particulier du théorème de Francke (N° 6)).

Soit P' un mineur d'ordre m de M', et P le mineur complémentaire dans M. Si P" est le mineur de (Adj M) formé avec les mêmes lignes et colonnes que P', on a

$$P' = \frac{P''\ \text{Det } D'}{(\text{Det } M)^m} = P''\ (\text{Det } D')^{1-m}$$

et en vertu du résultat de Jacobi qu'on vient de rappeler on a

$$P'' = P\ (\text{Det } D')^{m-1}$$

Il en résulte donc que P = P'. D'où le résultat suivant :

PROPRIETE III.

Un mineur d'ordre m de M' formé comme mineur mixte par colonnes

.../...

de $(M'^{1}_{i},\ldots, M'^{n}_{i})$ (i fixe), ou comme mineur mixte par lignes de $(M'^{i}_{1},\ldots M'^{i}_{n})$ est égal au mineur de la matrice M (d'ordre nm-m) formé avec les indices complémentaires.

Ce résultat généralise la propriété I de ce paragraphe.

10. Application des mineurs mixtes à la théorie des caractères.

Quelle que soit la matrice A, le coefficient du produit

$$(A^{n}.\ A^{n-1}\ldots A)\ (A^{k_1} o I^{on-1})\ldots (A^{k_n} o I^{on-1})$$

sont les caractères du groupe symétrique relatifs à la partition $k_1,\ldots, k_n$ de n.

Car en vertu de la formule (III, 2 Propriété III du No 8); ce développement a les mêmes coefficients que le produit symétrisé du n-mot alterné du premier facteur par les n-mots commutatifs des suivants (III C, 3 Remarque 2). Par un choix simple de la matrice A, on peut ainsi calculer les caractères du groupe symétrique.

BIBLIOGRAPHIE

Chapitre I

BERGE : Théorie des Graphes et ses applications DUNOD I958

EILENBERG-Mc LANE : On the Groups (H , n) (An. of Maths 58. I953)

RIORDAN : An introduction to Combinatorial Analysis New-York I958

Chapitre II

BEAVER Am. Monthly of Mathematics, Vol 39, I932 pp 266-276

BOURBAKI : Algèbre Ch VI et VII Paris Hermann I952

CHATELET (Albert) : Les groupes abéliens finis et les modules de points entiers, Paris Gauthier Villars I925

DRACH Théorie des formes et des invariants (Encyclopédie des Sciences Mathématiques Tome I, Vol 2 Art. 1,11) Paris Gauthier Villars I9II

KOWALEWSKI : Determinant en théorie Chelsea, New-York I946

NETTO : Encyclopédie, Tome I Vol 2; Déterminants.

RUTHERFORD : Substitutional Analysis (Edimbourg , I948)

TURNBULL H.W : The theory of déterminants, matrices and invariants (London and Glasgow I948)

Van der WAERDEN B.L. Moderne Algebra, Springer I930

Chapitre III

AITKEN -TURNBULL : Theory of canonical matrices (London I948)

CARTIER Séminaire Sophus Lie 2e année I955-56 Exposé 3

Van der CORPUT (J.G.) ur les fonctions symétriques (Math Centrum Scriptum 3, Amsterdam I950).

KONIG (J) Einleitung in die Theorie der Algebraischen Groszen (Leipzig Teubner I903)

LITTLEWOOD D : The theory of group characters and matrix representation

.../...

of groups (Oxford and Clarendon Press) I958.

MAC DUFFEE : Theory of Matrices (Ergebnisse) Chelsea I946

PAPY : Arithmétique dans les algèbres de Grassmann (Bruxelles I952)

SALMON : Algèbre supérieure, Gauthier Villars I890

SERRET : Algèbre supérieure Gauthier Villars I9IO.

VIVIER: Sur quelques théorèmes d'Algèbre extérieure (Thèse) (Gauthiers Villars I956).

TABLE DES MATIERES

-----o------

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I. n-MOTS ET PERMUTATIONS GENERALISEES

A. GENERALITES 4

n-mot 4
Permutation généralisée 5
Produit de couples 6
Liaison avec la théorie des graphes 10

B.COMPOSITIONS 11

Représentation par un treillis de Boole 12
par un demi groupe réticulé 13

C.COMPOSITIONS GENERALISEES 19

Demi groupe abélien réticulé des monomes 19
Sous treillis de ce treillis 21
Arborescences bifurcantes et parenthèses 23

D.PARTITIONS 26

Treillis des sommes secondes 26
Treillis des partitions d'un entier donné 28

E. TRESSES 33

Groupe d'Artin 33
Permutations d'éléments ,et de places 34
Application aux tresses 35

CHAPITRE II SYMETRISEURS ET ANTISYMETRISEURS

A.CALCUL DES SYMETRISEURS ET ANTISYMETRISEURS 37

Sous groupe lié à un antisymétriseur 38
Antisymétriseurs complémentaires 39
Déterminoide 40
Formule de Laplace et de Laplace duale 41
Produit de deux antisymétriseurs 43
Egalité entre sommes de déterminoides:for
mule de Schwein 47

B.PRODUIT DE DETERMINOIDES PAR DES SYMETRISEURS 51

Equivalence à droite et équivalence à gauche 52
Identité de Laplace -Turnbull 55
Extensionnels 58

Lemme de von Neumann 61
Autre présentation des antisymétriseurs 63

C.APPLICATIONS 65
n-mot commutatif et n-mot alterné 65
mots à deux indices 66
Antisymétriseur composé 69
Théorème de Sylvester-Francke 7I
Extensionnel de ce théorème 73
Formule de Reiss Picquet 73
Théorème des mineurs réguliers 76
Formule de Muir Kronecker Runge 82
Groupements d'indices équivalents à droite
Pfaffiens généralisés et Pfaffiens 83

CHAPITRE III PRODUIT SYMETRISE

A GENERALITES 87

Produit associatif entre n-mots 87
Produit symétrisé relativement au groupe G 87
Liaison avec la théorie des permutations 89
Formule de Newton-Cayley-Hamilton 94

B.PRODUIT SYMETRISE DE n-MOTS COMMUTATIFS 96

n-mot commutatif réduit 97
Formulesde Cayley Hamilton et de Newton 98
n-mot monogène commutatif 99
Interprétation des coefficients 102
Théorème de Phillips 106
Rang et équation caractéristique 107
Théorème de Poisson-Schlafli 111
Théorème de Frobenius(mots permutables) 114
Opérateurs de Van der Corput 115

C. n-MOTS ALTERNES 117

Définition des fonctions de Schur 118
Un théorème de Dedekind 120

D. DERIVATIONS ET POLARISATIONS 122

Formule de Leibnitz 122
Polarisation.Formule de Taylor 123
Dérivation d'un n-mot commutatif monogène. Théorème de Serret 126
Dérivation extérieure 129

E.PRODUIT SYMETRISE DE MATRICES 130

Définition 130
Cas des matrices carrées d'ordre n 132
Interprétation de A^{ok} 134
Généralisation des vecteurs propres 135
Matrices transposées 137
Application aux matrices symétriques et symétriques gauches 139
Application au calcul des symétriseurs et antisymétriseurs 142
Théorème de Francke 144
Produit symétrisé généralisé 147
Mineurs mixtes par lignes et par colonnes 148
Mineurs mixtes de matrices permutables 153

BIBLIOGRAPHIE 158

TABLE DES MATIERES 160

-------o---------

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Notion de courant. Application à l'homologie

Vu et approuvé :
Paris, le 17 décembre 1961
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
M. ZAMANSKY

Vu et Permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
JEAN ROCHE